



TITLE:

1次元量子系の厳密解とベーテ仮説 の数理物理

AUTHOR(S):

出口, 哲生

CITATION:

出口, 哲生. 1次元量子系の厳密解とベーテ仮説の数理物理. 物性研究
2000, 74(3): 255-319

ISSUE DATE:

2000-06-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/96826>

RIGHT:

1 次元量子系の厳密解とベーテ仮説の数理物理¹

お茶の水女子大学大学院人間文化研究科複合領域科学専攻
出口 哲生²

(2000 年 5 月 10 日受理)

目 次

1	はじめに	257
1.1	厳密解とは	257
1.2	厳密解を研究する物理学上の動機	258
1.3	量子 1 次元系と古典 2 次元系の対応、そして可解モデルの数理	258
1.4	ベーテ仮説について – ベーテ仮設法とストリング仮説	259
1.5	本解説の特色と構成	260
2	可解量子スピン系の例	261
2.1	1 次元量子 Heisenberg 模型 – 量子スピン系の厳密解の代表例	261
2.2	異方性をもつ可解量子スピン鎖の例	262
2.3	1 次元ハバード模型 – 強相関電子系の厳密解の代表例	263
3	波動関数のベーテ仮設法の厳密な導出	264
3.1	ベーテ仮設波動関数	264
3.2	周期的境界条件 (ベーテ仮設波動関数)	266
3.3	ベーテ仮設ベクトルが固有ベクトルとなる十分条件	268
3.4	振幅に対する関係式 (固有ベクトルの十分条件) の無矛盾性	273
3.5	ベーテ仮設方程式	275
3.6	ベーテ仮設固有ベクトルの数え上げとベーテ仮説の妥当性	276
3.7	スピン波理論との関係	277

¹ 本稿は、編集部から特にお願ひして執筆していただいた記事である。

² E-mail: deguchi@phys.ocha.ac.jp

4	2次元古典系の厳密解	278
4.1	6 パーテックス模型	278
4.2	独立なボルツマン重率の個数	280
4.3	ヤン・バクスター関係式と転送行列の交換	280
4.4	ヤン・バクスター関係式を満たすボルツマン重率の解	283
5	代数的 Bethe 仮設法 (量子逆散乱法)	286
5.1	R 行列と L 演算子	286
5.2	モノドロミー行列と転送行列	289
5.3	演算子の交換関係	291
5.4	ベーテ仮設固有ベクトルの構成とベーテ仮設方程式	293
5.5	可解ハミルトニアンの転送行列からの導出	296
5.6	運動量演算子とハミルトニアンの固有値	298
5.7	ベーテ仮設固有ベクトルの回転対称性、ベーテ仮設法の「パウリ原理」	299
6	ストリング仮説と励起状態	299
6.1	ベーテ仮設方程式の実数解	299
6.2	反強磁性 Heisenberg 模型の基底状態	300
6.3	ホール励起状態	303
6.4	反強磁性基底状態における素励起：スピノン	305
6.5	ストリング解 – ベーテ仮設方程式の複素解	307
6.6	ストリング解の数え上げ	309
7	厳密解の低励起スペクトルの特徴付けと共形場理論 (CFT)	311
8	可解模型に関連する数理論理の話題	312
8.1	対称群と組みひも群	312
8.1.1	演算子形式のヤン・バクスター方程式	312
8.1.2	組みひも群	312
8.2	量子群 (ホップ代数)	313
9	有限系の厳密解とメゾスコピック系への応用可能性	315
A	座標的ベーテ仮設法の一般の場合	315
B	ストリング解の数を与える状態和の計算	316

1 はじめに

1.1 厳密解とは

量子系の多体問題の中には「厳密に解ける」場合がある。ここで「厳密に解ける」とは、与えられたハミルトニアン基底エネルギーや基底状態、そして素励起などを解析的に求められることである、と定義してみよう。そして、このような量子系を「厳密に解ける模型」とよぶことにする。本解説ではさらに、ベーテ仮説の方法 (Bethe ansatz) が適用可能な模型に限定して議論しよう。この場合には、原理的にその全てのエネルギー固有値と固有状態を求められる模型が存在する。本解説の目的は、1 次元量子系の厳密解、特にベーテ仮説の方法 (Bethe ansatz) で詳しく調べられる可解模型の数理論理を分かり易く紹介することである。

「厳密に解ける模型」という言葉の意味は必ずしも一意的とは限らない。[1-10] [11, 12] ベーテ仮説 (Bethe ansatz) の方法で調べられる模型の中には、実質的に全てのエネルギー固有値と固有状態を議論できる場合があり、このような場合には有限温度の熱力学量まで求められている。ただし、ベーテ仮説の方法 (Bethe ansatz) で調べられる模型でも、研究が進んでいないために全ての固有状態をまだ議論できないものも多数ある。このため、一概に言い切ることは難しい。

「厳密に解ける」という日本語は英語では「exactly solved」に大体対応すると思われる。ここで「exactly solved」の意味は、第一義的には文字通り、数学的にも厳密に解かれた、ということであろう。しかし僅かながらも筆者の経験では、物理量の解析的な表式や臨界指数などの数値が誤差なくきちんと求められた場合、これらの導出を数学的には証明出来ない場合にも、「厳密に解けた」と報告されることが多いように思う。そしてこのような広い意味での「厳密に解ける」という意味と区別するため、数学的な証明が与えられた場合には特別に「rigorously shown」というような表現が用いられるのではないかと思う。

このような微妙な言葉の用法は、有限自由度の系から出発して無限自由度の系（あるいは、ある程度以上の大きさの有限自由度多体系）の性質を議論することの数学的な困難さを反映している。有限系から無限系へ至る極限を全く何の困難もなく議論できる場合は非常に数が少ない。物理学の理論の中には、むしろ無限系の振る舞いを近似として取り入れた結果、成功する場合がある。例えば繰り込み群やスケールリング則の臨界現象への適用などがそのような例ではないだろうか。ベーテ仮説による厳密解の取り扱いですら、解析的表式を導出する際に何らかの仮定が必要な場合がある。（後で見るように、1 次元ハイゼンベルグ模型の場合にはストリング仮説が導入される。）

以上の議論をまとめてみよう。ある物理量の計算結果の解析的表現が非常に確からしいということが分かったとき、数学的な証明が与えられなくても、それは「厳密解」(exact solutions) とよばれる。もちろん、数値的手法など他の方法でその結果あるいは導出の際に用いられた仮定を確認することが重要であることは言うまでもない。

1.2 厳密解を研究する物理学上の動機

さて、物理学において厳密解を研究する動機とは一体何であろうか。もし一言で表現するなら、自由度の大きな多体系の性質をきちんと調べることに、つまりミクロな相互作用がマクロな系の振る舞いにどのように反映するかを理解すること、と言えるであろう。話を具体的にするために、例を挙げてもう少し詳しく考えてみよう。筆者は大体次のようなところではないかと考えている。

厳密解の研究の物理学における意義：

- （他の方法では解析が困難な）相互作用する多体系に関する正しい情報を導くこと
- 低次元系特有の性質を明らかにすること
- 厳密解と数値的な方法を合わせて一般の場合を類推すること

一つ目には、必ずしも 1 次元系である必要はないが、量子的な臨界状態など他の方法では解析が非常に困難な物理系の性質を調べ、一般次元の相互作用する多体系に関する正しい議論を誘導することが挙げられる。1 次元量子系の基底状態はしばしば臨界状態であり、相関長が非常に大きく揺らぎの効果が全系にまで及んでしまう。また、近藤問題のような本質的な多体問題を厳密に議論できることは非常に意義深いと思われる。[11]

二つ目は、1 次元系特有の性質を明らかにすることである。一般に低次元系においては揺らぎの効果が無視できず、量子 1 次元に特有の多体効果がいくつも知られている。例えばキंक解であるスピノン励起、また強相関電子系におけるスピン電荷分離などが挙げられるであろう。

そして三つ目には、厳密解と数値的な方法を合わせて、一般の厳密に解けない場合の様子を類推するのに役立つことがある。例えば 1 次元 $t-J$ 模型は超対称な場合しか厳密に解けないことが知られている。しかし、数値計算と厳密解を突き合わせることで、一般の場合の様子が探索されている。

1.3 量子 1 次元系と古典 2 次元系の対応、そして可解模型の数理

可解模型といえ、2 次元イジング模型を忘れることは出来ない。[3] 2 次元イジング模型は、2 次元の強磁性の模型であると同時に 2 次元の格子ガス模型でもある。2 次相転移や臨界状態の振る舞いに関する正しい知識を提供し、統計力学の歴史的発展の中で非常に重要な役割を果たした。

イジング模型のように、変数が c 数であるものを「古典系」とよぶ。（ c 数とは、他のどの変数とも交換する変数のことで、スカラー変数と見なせる変数である。）2 次元イジング模型は古典 2 次元系の厳密に解ける模型の代表例である。興味深いことに、量子 1 次

元系の厳密解は数学的には、古典2次元系の可解模型と対応している。ただしこれがどう言う意味なのかをきちんと述べるには多少の準備が必要である。そこで本文では、量子1次元系の厳密解を最初に考え、後から古典2次元系が対応することを詳しく説明する。

古典2次元系の可解模型と量子1次元系の可解模型との数学的な対応関係は、厳密解の数理解物理において非常に重要である。実際、量子系の可解性の数理的性質は、対応する古典2次元系の転送行列を考察すると明らかになる。このことを数学的にきちんと表現したものが、代数的ベータ仮説法 (algebraic Bethe ansatz あるいは QISM) である。³

1.4 ベータ仮説について – ベータ仮説法とストリング仮説

ベータ仮説はどこまでまだ仮説なのであろうか。この点こそが本解説の最重要ポイントであり、詳細に解説される。しかし長いので、前もって要約しておこう。

ベータ仮説は(強磁性)1次元ハイゼンベルグ模型のスピンの束縛状態を議論したベータの論文に由来する。[1] この論文の内容を簡単に紹介する。固有波動関数の関数形(ベータ仮説型波動関数)を仮定してハイゼンベルグハミルトニアン作用を計算すると、スピン励起の擬運動量がベータ仮説方程式を満たすときにこれが固有ベクトルになることが議論されている。そして、ある仮定(ストリング仮説)の下にベータ仮説方程式の解の個数を数え上げた結果、1次元格子の格子点の総数が N のとき 2^N 個の線形独立な固有ベクトルが導かれることを議論する。つまり、最初に前提にしたベータ仮説型波動関数(およびそれから導かれる波動関数)だけで完全系を作るので他のタイプの固有ベクトルは存在しない、という論法である。ベータの議論は詳細で、ベータ仮説方程式の束縛解(ストリング解)を仮定して解の個数を勘定すると、ちょうど全部で 2^N 個になる、ということを予想として主張している。ここで束縛解(ストリング解)の存在の仮定とその数え上げの方法の二つをまとめて、ストリング仮説、とよぶ。

ベータの論文に書かれている内容がベータ仮説の意味であると解釈してみよう。するとベータ仮説は次の二つの部分から構成されている。

1. ベータ仮説型波動関数を仮定して固有波動関数を導くこと
2. ベータ仮説型波動関数(およびそれから導かれる固有関数)だけで完全系を作るという主張

まず第一のポイントを議論しよう。1次元ハイゼンベルグ模型の場合、その(有限系の)基底状態がベータ仮説型波動関数で与えられることはヤン・ヤン [2] によって証明されている。これは重要な事実で、基底状態が分かれば、絶対零度での磁化など興味のある物理量の相当多くの部分は数学的にもほぼ厳密に議論できる。一般の固有状態の場合に関しても、ベータ仮説方程式の解に対応してベータ仮説型の固有波動関数が存在することを数学的に証明するのは、そう困難ではない。現在では、何通りかの証明法がある。(本解

³ QISM とは、Quantum Inverse Scattering Method の略である。[6, 7, 8, 12]

説では座標的ベータ仮説法と代数的ベータ仮説法の二つの証明を議論する。) この部分の議論は近年非常に発達し、「可解性」をヤン・バクスター方程式で特徴づける量子逆散乱法、ヤン・バクスター方程式の解を導く量子群などの新しい数理物理学が展開し、今では数多くの可解模型が議論されている。[12]

一方、完全系の主張を数学的に証明することは相当困難であり、現段階の研究水準での証明はほぼ絶望的ではないかと思われる。⁴ 状況は微妙で、ストリング仮説それ自身には反例が見つまっているがベータ仮説方程式の解の個数の数え上げの結果は常に正しく、完全系でないことが示されたことは今まで一度もない。実際すでにベータの論文において、束縛状態が壊れてしまう場合が示されており、さらにその場合でも解の個数は変わらないことがきちんと議論されている。さらに、ストリング解が壊れてしまう場合でもそのことが熱力学的物理量の評価に及ぼす効果は案外小さいのではないかと、というのが筆者の感想である。ただし、そのような正当化の議論は今までほとんどなされておらず、学問的には重要な課題として残されている。

まとめると、ベータ仮説は完全系に関する部分も含めると、まだ証明されてはいない。しかし、基底状態に関しては証明されている場合もあり、さらにストリング仮説を用いた熱力学的計算もその結果自体はかなり確実性が高いと考えられている。さらに、ベータ仮説の前半部分の模型の可解性に関しては、量子逆散乱法や量子群などにより数学的に厳密でかつ明快な説明が可能となった。

以上のようなベータ仮説の研究の発展を鑑みると、「ベータ仮説」を前半と後半の二つに分け、前半部分を「ベータ仮説法」、後半部分の完全性の議論を「(広義の) ストリング仮説」と名前を付けて区別するのが便利ではないかと思われる。従来のように「ベータ仮説」と一言で全体をまとめることも可能ではあるが、今後問題点を整理する都合上、残された主要な問題点が「(広義の) ストリング仮説」であることを明確に認識することが重要である。標語的には、以下のような主張である。

$$(\text{ベータ仮説の方法}) = (\text{ベータ仮説法}) + (\text{ストリング仮説}) \quad (1)$$

簡単に言うと、「ベータ仮説法」はベータ仮説方程式を導くまでの数学的導出のことを意味し、そして「ストリング仮説」は、ベータ仮説方程式の解を求めることを意味する。

1.5 本解説の特色と構成

本解説の最大の特色は、ベータ仮説の方法の基礎、つまり波動関数のベータ仮説法と代数的ベータ仮説法をきちんと丁寧に解説したことである。これらの話題に関しては他の文献では詳しい説明はほとんどなされていないと言って良い。特に両者がどのように関係す

⁴ V.E. Korepin 氏から内緒話として筆者が聞いたところでは、Kazhdan-Lusztig 予想で世界的に有名な数学者の Kazhdan が数年間証明を試みていたが、しばらく前にどうやら諦めたいらしい、とのことであった。この話から示唆されることは、ストリング仮説には未来の新しい数学が含まれている可能性が高いということである。

るかの記述は英文でも非常に稀である。[8] 1次元量子系に対する波動関数のベータ仮説法[1, 10]、バクスターの教科書[4]に展開されているような2次元古典統計力学系の転送行列法、そしてこの両者をつなぐ代数的ベータ仮説法[6]の三つを同時に解説する文献は、まだ存在していないと思われる。また、出来る限り物理的な意味を説明し、物理的な見方から自然に数理論理を理解できるように努力した。

本解説の構成を以下に説明する。第2節では1次元ハイゼンベルグ模型など、代表的な可解模型の例を紹介する。第3節では、ベータ仮説波動関数を用いた固有関数の構成法を数学的にも厳密に議論する。第4節では、2次元古典統計系の可解格子模型である6バーテックス模型を説明し、ヤン・バクスター関係式と転送行列の関係を述べる。ヤン・バクスター関係式の取り扱いを図解する。第5節では、代数的ベータ仮説法を丁寧に解説する。第6節ではストリング仮説とスピノン励起を議論する。第7、8、9節は関連する話題をカタログ的に取上げ、本解説で議論された事柄が他の幅広い分野に関係することを示唆する。本解説が様々な分野の参考書や研究論文を読んでいくきっかけになれば、望外の幸いである。[1-10][11-21]

2 可解量子スピン系の例

2.1 1次元量子 Heisenberg 模型 – 量子スピン系の厳密解の代表例

周期的な1次元格子鎖の上に定義された量子ハイゼンベルグ模型 (XXX 模型) は、量子スピン系を代表する可解格子模型である。[1, 10] 格子点の数を N として、そのハミルトニアンは以下のように表される。

$$\mathcal{H}_{XXX} = J \sum_{\ell=1}^N \vec{S}_{\ell} \cdot \vec{S}_{\ell+1}, \quad \text{where } \vec{S}_{N+1} = \vec{S}_1. \quad (2.1)$$

上式では周期的境界条件: $\vec{S}_{N+1} = \vec{S}_1$ を仮定した。結合定数 J が正のとき ($J > 0$)、基底状態は反強磁性的となる。本解説では量子ハイゼンベルグ模型は反強磁性の場合のみを考えることにする。変数 \vec{S}_{ℓ} は ℓ 番目の格子点上に定義された量子変数であり、スピン変数とよぶ。そしてその大きさは $1/2$ とする。

$$\vec{S}_{\ell} = (S_{\ell}^X, S_{\ell}^Y, S_{\ell}^Z) = \left(\frac{1}{2} \sigma_{\ell}^X, \frac{1}{2} \sigma_{\ell}^Y, \frac{1}{2} \sigma_{\ell}^Z \right) \quad (2.2)$$

上のスピン変数を数学的にもう少しきちんと説明しよう。まず、パウリ行列は以下のような行列である。

$$\sigma^X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

2行2列の単位行列を I と表すことにする。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

単位行列 I の n 重のテンソル積を、 $I^{\otimes n}$ と表すことにする。すると、 j 番目の格子点上のパウリ行列 σ_j^X は、次のように定義される。

$$\sigma_j^X = \overbrace{I \otimes \cdots \otimes I}^{j-1} \otimes \sigma^X \otimes \overbrace{I \otimes \cdots \otimes I}^{N-j} = I^{\otimes(j-1)} \otimes \sigma^X \otimes I^{\otimes(N-j)} \quad (2.5)$$

この模型がハイゼンベルグ模型と呼ばれる理由は、ハイゼンベルグが強磁性の微視的原因として隣り合う原子上の電子の波動関数の交換積分を考察したことに由来する。[22, 23, 24] ただし、 $\vec{S}_j \cdot \vec{S}_k$ というスピン変数同士の結合をきちんと数学的に定式化したのはディラックであるらしい。電子の波動関数の重なりから交換積分 J を導くことは、磁性あるいは量子力学の教科書を参考にして欲しい。[23, 22, 24]

1次元反強磁性 XXX 模型（量子ハイゼンベルグ模型）の特徴として、以下のような事柄が挙げられる。

- 基底状態は全スピン 0 ($S = 0$)、量子揺らぎあり（古典的ネール状態でない）
- 基底状態は臨界状態、ギャップなし
- 励起状態はスピノン (spinon) という「キンク解」

2.2 異方性をもつ可解量子スピン鎖の例

量子ハイゼンベルグ模型 (2.1) のスピン変数の結合は等方的で、ハミルトニアンには回転対称性が存在する。一方、回転対称性を壊すような異方的な結合定数が存在すると、結合定数の値に応じて多様な基底状態が出現する可能性が出てくる。（量子系の模型の結合変数に依存して異なる基底状態が出現する現象を、量子相転移現象という。）

等方的な量子ハイゼンベルグ模型において、 Z 軸方向のスピン変数の結合が変化するものを XXZ 模型とよぶ。1次元異方的ハイゼンベルグ模型のハミルトニアンは以下のようなものである。

$$\mathcal{H}_{XXZ} = -J \sum_{\ell=1}^N \left(S_{\ell}^X S_{\ell+1}^X + S_{\ell}^Y S_{\ell+1}^Y + \Delta S_{\ell}^Z S_{\ell+1}^Z \right), \quad \text{where } \vec{S}_{N+1} = \vec{S}_1. \quad (2.6)$$

ここで変数 Δ は異方性を表す変数であり、その値に応じて基底状態は異なる。 $|\Delta| \leq 1$ の場合、励起スペクトルにギャップがなく、基底状態は量子的な臨界状態であると考えられる。一方、 $|\Delta| > 1$ の場合、励起スペクトルにはギャップが存在する。

異方的ハイゼンベルグ模型はさらに一般化して、XYZ 全ての結合定数が異なる 1次元 XYZ 模型を考えることができる。そのハミルトニアンは以下に与えられる。

$$\mathcal{H}_{XYZ} = - \sum_{\ell=1}^N \left(J_X S_{\ell}^X S_{\ell+1}^X + J_Y S_{\ell}^Y S_{\ell+1}^Y + J_Z S_{\ell}^Z S_{\ell+1}^Z \right), \quad \text{where } \vec{S}_{N+1} = \vec{S}_1. \quad (2.7)$$

ここで XXZ 模型は $J_X = J_Y = J, J_Z = J\Delta$ の場合に対応する。1次元 XYZ 模型の基底状態はその結合定数 $J_X, J_Y = J, J_Z$ に依存して定まるが、やや詳細になるので省略する。

[4]

2.3 1次元ハバード模型 – 強相関電子系の厳密解の代表例

量子スピン系に適用されていたベレー仮説の方法を拡張して、相互作用する電子系の厳密解が導かれる。1次元ハバード模型はその代表例である。

周期的な1次元格子鎖の各格子点上に原子が位置し、その原子にはほぼ局在した電子状態が存在すると仮定する。電子状態としてはワニアー波動関数を考える。電子は上向きか下向きのスピンを持ち、各原子において上向き（下向き）の電子は一個しか存在できないとする。つまりパウリの排他律である。（バンドは一個ということ）このとき、格子点 j 上にスピン σ を持つ電子を生成する演算子（消滅させる演算子）を $c_{j,\sigma}^\dagger$ ($c_{j,\sigma}$) とする。これらはフェルミオン演算子であり、反交換関係を満たす。隣接する格子点上の電子の波動関数は互いに少しだけ重なり、このため電子は最近接格子点へ移動できると考える。さらに電子間にはクーロン力に由来する相互作用が作用する。ただし局在電子状態（実はワニアー波動関数）から出発するので、同じ格子点を占有する電子同士の間には電子間相互作用が存在しないと仮定できる。隣接する格子点上の電子間の波動関数の重なりは小さく、電子間相互作用も非常に小さい。この結果、同一の格子点に上向きスピンと下向きスピンの電子が一個ずつ存在する場合だけ、電子間相互作用が存在する。

以上の物理的考察を数学的に表現しよう。1次元ハバード模型のハミルトニアンは、以下のように与えられる。

$$\mathcal{H}_{Hubbard} = -t \sum_{j=1}^L \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} (c_{j,\sigma}^\dagger c_{j+1,\sigma} + c_{j+1,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma}) + U \sum_{j=1}^L n_{j,\uparrow} n_{j,\downarrow} \quad (2.8)$$

ここで格子点の総数は L とする。周期的境界条件は、 $c_{L+1,\sigma} = c_{1,\sigma}$ および $c_{L+1,\sigma}^\dagger = c_{1,\sigma}^\dagger$ で与えられる。そして結合定数は、 $4t$ はバンド幅に対応し、ハバード結合定数 U は電子間のクーロン力に対応する。また、 $n_{j,\sigma} = c_{j,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma}$ は j 番目の格子点上のスピン σ の電子の数を表す。

1次元ハバード模型の特徴としては、以下のような事柄が挙げられる。

- ハバード結合定数が斥力的のとき ($U > 0$)、ハーフフィリングでモット絶縁体を実現する
- スピン自由度と電荷自由度が分離（スピノン励起、ホロン励起）
- ハバード結合定数が引力的のとき ($U < 0$)、スピングャップが存在する

1次元ハバード模型のスピン部分のスペクトルは1次元反強磁性量子ハイゼンベルグ模型と細かい点を除けばほぼ同じである。そこで、1次元ハバード模型は、電荷励起部分を含むようにXXX模型を一般化した模型であるとも見なせる。スピン自由度と電荷自由度の分離は低いエネルギー励起状態に対してのみ成立する、と通常考えられている。1次元ハバード模型の低励起スペクトルは共形場理論あるいは朝永・ラッチィンジャー流体を実現していると解釈できるので、そのように考えることも無理はない。しかし実際には、系

の大きさ L が十分に大きい場合、電荷ギャップの存在する励起状態も含めてスピン自由度と電荷自由度の分離が成立する。[26] 共形場理論および朝永・ラッティンジャー流体では励起エネルギーの線形分散関係はその前提であるが、電荷ギャップ励起状態では線形分散関係は成立しない。しかしその場合でも、1次元ハバード模型ではスピン・電荷分離が実現している場合がある。

3 波動関数のベーテ仮設法の厳密な導出

3.1 ベーテ仮設波動関数

ベーテ仮設法には、固有波動関数を仮定するもの（波動関数のベーテ仮設法, coordinate Bethe ansatz）、代数的な交換関係を用いるもの（代数的ベーテ仮設法, algebraic Bethe ansatz）、そして転送行列の固有値の解析性の仮定から方程式を導くもの（解析的ベーテ仮設法, analytic Bethe ansatz）の3種類がある。ここではその中でも最も歴史の古い、座標的ベーテ仮設法を議論する。具体的な例として、XXX 模型に対するベーテ仮設法を考える。 M 個の下向きスピンの擬運動量 k_j がベーテ仮設方程式を満たすとき、対応するベーテ仮設波動関数は XXX ハミルトニアン の固有関数となることを数学的に厳密に証明する。

1次元 XXX 模型のハミルトニアン (2.1) の固有関数を求めてみよう。最初に考察すべきことは、系の持つ対称性である。明らかに、XXX 模型は回転対称性を持つ。この対称性を具体的に交換関係で表現してみよう。

全スピン角運動量演算子 \vec{S} を導入する。

$$\vec{S}_{tot} = \sum_{j=1}^N \vec{S}_j \quad (3.1)$$

ただし、各格子点上のスピン変数の大きさはどれも $1/2$ であるとする。 $\vec{S}_j = \vec{\sigma}_j/2$ このとき、全スピン角運動量はハミルトニアンと交換することを示せる。

$$[\mathcal{H}_{XXX}, \vec{S}_{tot}] = 0, \quad (3.2)$$

こうして、全スピン角運動量が系の保存量であることが明らかになった。全スピン角運動量 \vec{S}_{tot} の大きさ S_{tot} と Z 成分 S_{tot}^Z はハミルトニアンと同時対角化される。XXX ハミルトニアン の固有ベクトルを表す量子数（の一部）として、全スピン各運動量の大きさ S_{tot} とその Z 成分 S_{tot}^Z の値を考えることができる。

全スピン角運動量の Z 成分を対角化する方向に選んだので、各格子点のスピン演算子の z 成分を対角化する表示を選択すると便利である。まず、全てのスピンの上向きの状態を考えよう。これを「真空」として選ぶ。

$$|0\rangle = |\overbrace{\uparrow\uparrow\cdots\uparrow}^N\rangle \quad (3.3)$$

ベクトル表示では、「真空」状態は以下のように表せる。

$$|0\rangle = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^N \quad (3.4)$$

ベーテ仮説固有状態を定義しよう。まずスピン 1/2 の上げ下げ演算子を以下のように定める。

$$\sigma^+ = \frac{1}{2}\sigma^X + i\frac{1}{2}\sigma^Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \frac{1}{2}\sigma^X - i\frac{1}{2}\sigma^Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

下向きのスピンの M 個のベーテ仮説ベクトルを $|M\rangle$ と表し、以下のように定める。

$$|M\rangle = \sum_{1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_M \leq N} f(x_1, \dots, x_M) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- \cdots \sigma_{x_M}^- |0\rangle \quad (3.6)$$

ここで係数 $f(x_1, \dots, x_M)$ は M 個の下向きスピンの x_1, \dots, x_M に存在する場合の波動関数を表す。ただし、 $1 \leq x_1 < \cdots < x_M \leq N$ の場合のみを考える。 $f(x_1, \dots, x_M)$ をベーテ仮説波動関数とよび、次式のように与えられるものとする。

$$f(x_1, \dots, x_M) = \sum_{P \in S_M} A_M(P) \exp \left(i \sum_{j=1}^M k_{P_j} x_j \right) \quad (3.7)$$

ここで S_M は M 次の対称群（置換群）、 P はその要素であるひとつの置換を表す。 j に対する置換演算の結果を Pj と表す。そして和記号 $\sum_{P \in S_M}$ は対称群 S_M の $M!$ 個の全ての要素に関する和を示す。 k_1, \dots, k_M は異なる M 個の定数（一般には複素数）であり、擬運動量 (quasi-momenta) とよぶ。これらはスピン波の「格子運動量」のように見えるが、正確に述べると通常のスピン波ではないことを後で示す。 $A_M(P)$ は振幅とよばれ、あとでゆっくり決めることにする。また、波動関数 $f(x_1, \dots, x_M)$ は詳しくは $f(x_1, \dots, x_M; k_1, \dots, k_M)$ と表すことができる。

定義式 (3.7) が何を意味するのかをすぐに理解することは難しいので、いくつか簡単な例を調べてみよう。

(1) $M = 1$ の場合

下向きスピンが一個の場合、波動関数は単なる指数関数である。

$$f(x) = A \exp(ikx) \quad (3.8)$$

この場合は単なる平面波解である。よって、ベーテ仮説ベクトルは波動関数 $f(x)$ が周期的境界条件を満たせば XXX ハミルトニアン固有ベクトルとなる。

(2) $M = 2$ の場合

下向きスピンが 2 個の場合、2 次の対称群は

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.9)$$

の2個の要素が存在する。ここで与えられた置換 P を次のように表現した。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

そして、置換 P に対して振幅 $A(P)$ を $A(P) = A[P_1, P_2]$ と表そう。すると、ベーテ仮設波動関数は以下ようになる。

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \sum_{P \in S_2} A(P) \exp i(k_{P_1} x_1 + k_{P_2} x_2) \\ &= A[12] e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} + A[21] e^{i(k_2 x_1 + k_1 x_2)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

(3) $M = 3$ の場合

3次の対称群 S_3 の要素は以下の6個である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

置換 P に対して振幅 $A(P)$ を $A(P) = A[P_1, P_2, P_3]$ と表す。するとベーテ仮設波動関数は、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{P \in S_3} A(P) \exp i(k_{P_1} x_1 + k_{P_2} x_2 + k_{P_3} x_3) \\ &= A[123] \exp i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3) + A[132] \exp i(k_1 x_1 + k_3 x_2 + k_2 x_3) \\ &\quad + A[213] \exp i(k_2 x_1 + k_1 x_2 + k_3 x_3) + A[231] \exp i(k_2 x_1 + k_3 x_2 + k_1 x_3) \\ &\quad + A[312] \exp i(k_3 x_1 + k_1 x_2 + k_2 x_3) + A[321] \exp i(k_3 x_1 + k_2 x_2 + k_1 x_3) \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.2 周期的境界条件 (ベーテ仮設波動関数)

XXX ハミルトニアンは周期的境界条件： $\vec{S}_{N+1} = \vec{S}_1$ の下で定義されているので、波動関数も周期的境界条件を満たさなければならない。⁵ 下向きスピンの位置座標が $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_M \leq N$ を満たすとき、波動関数に対して次式が成立しなければならない。

$$f(x_1, x_2, \dots, x_M) = f(x_2, \dots, x_M, x_1 + N) \quad (3.14)$$

(1) $M = 1$ の場合

周期的境界条件： $f(x) = f(x + N)$ が成立するための必要十分条件は明らかに次式である。

$$\exp(ikN) = 1 \quad (3.15)$$

⁵ そうでないと、XXX ハミルトニアンの波動関数への作用がうまく閉じない。

(2) $M = 2$ の場合

まず次式に注意する。

$$\begin{aligned} f(x_2, x_1 + N) &= A[12] \exp i(k_1 x_2 + k_2(x_1 + N)) + A[21] \exp i(k_2 x_2 + k_1(x_1 + N)) \\ &= A[21] \exp(ik_1 N) \exp i(k_1 x_1 + k_2 x_2) + A[12] \exp(ik_2 N) \exp i(k_2 x_1 + k_1 x_2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

すると、 $1 \leq x_1 < x_2 \leq N$ を満たす任意の x_1 および x_2 に対して周期的境界条件: $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1 + N)$ が成立するための必要十分条件は

$$A[21] \exp(ik_1 N) = A[12], \quad A[12] \exp(ik_2 N) = A[21] \quad (3.17)$$

(3) $M = 3$ の場合

周期的境界条件

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_3, x_1 + N) \quad (3.18)$$

から 6 個の条件式が導かれる。上式の左辺において次のような置き換えを行うと、右辺が導かれる。

$$x_1 \rightarrow x_2, \quad x_2 \rightarrow x_3, \quad x_3 \rightarrow x_1 + N \quad (3.19)$$

そこでこの置き換えを左辺の一つの項に適用してみよう。

$$\begin{aligned} A[123] \exp i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3) &\rightarrow A[123] \exp i(k_1 x_2 + k_2 x_3 + k_3(x_1 + N)) \\ &= A[123] \exp(ik_3 N) \exp i(k_3 x_1 + k_1 x_2 + k_2 x_3) \end{aligned} \quad (3.20)$$

ここで $f(x_1, x_2, x_3)$ における $\exp i(k_3 x_1 + k_1 x_2 + k_2 x_3)$ の係数が上と一致することから、

$$A[123] \exp(ik_3 N) = A[312] \quad (3.21)$$

が導かれる。他の 5 式も同様にして導かれる。これらの条件は以下のようにまとめられる。記号 (123) で、 $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$ なる巡回置換を表す。このとき任意の置換 $Q \in S_3$ に対して、周期的境界条件は次の関係式で与えられる。

$$A(Q(123)) \exp(ik_{Q1}) = A(Q) \quad (3.22)$$

ここで $Q1$ とは、置換 Q の 1 への作用を表す。例えば $Q = (12)$ のとき、 $Q1 = 2$ である。

(4) 一般の M の場合

記号 $(12 \cdots M)$ で、 $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, \dots, M \rightarrow 1$ なる巡回置換を表す。このとき周期的境界条件は次の関係式で与えられる。

$$A(Q(12 \cdots M)) \exp(ik_{Q1}) = A(Q), \quad \text{for } Q \in S_M. \quad (3.23)$$

3.3 ベーテ仮設ベクトルが固有ベクトルとなる十分条件

前節で取上げたベーテ仮設固有状態がどのような場合に固有ベクトルになるのか、詳しく調べてみよう。ただし、周期的境界条件は満たされているものとする。以後、格子点の総数 N は偶数とする。

まず、 $S_\ell^Z S_{\ell+1}^Z$ の項を次式のように変形する。

$$\sum_{\ell=1}^N S_\ell^Z S_{\ell+1}^Z = \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^N (\sigma_\ell^Z - 1)(\sigma_{\ell+1}^Z - 1) + \left(\frac{N}{4} - M\right) \quad (3.24)$$

演算子 $(\sigma_\ell^Z - 1)$ は、格子点 ℓ に下向きスピンのある場合に -2 、いない場合は 0 を与える。上のよう変形すると、下向きスピンの存在する格子点だけを考えれば良いので、取り扱いが容易になる。例えば一般の場合、次のように表せる。

$$(\sigma_\ell^Z - 1) \sigma_{x_1}^- \cdots \sigma_{x_M}^- |0\rangle = \left(\sum_{j=1}^M (-2) \delta_{\ell, x_j} \right) \sigma_{x_1}^- \cdots \sigma_{x_M}^- |0\rangle \quad (3.25)$$

次に、XXX ハミルトニアンを昇降演算子で書き直す。その結果と上の変形とをまとめて、次式が導かれる。

$$\mathcal{H}_{XXX} = \frac{J}{2} \sum_{\ell=1}^N \left\{ \sigma_\ell^+ \sigma_{\ell+1}^- + \sigma_\ell^- \sigma_{\ell+1}^+ + \frac{1}{2} (\sigma_\ell^Z - 1)(\sigma_{\ell+1}^Z - 1) \right\} + J \left(\frac{N}{4} - M \right). \quad (3.26)$$

XXX ハミルトニアンのベーテ仮設ベクトルへの作用を具体的に考察しよう。

(1) $M = 1$ の場合

下向きスピンの一個の場合、波動関数は単なる指数関数である。 $(f(x) = A \exp(ikx))$ まず次式に注意しておく。

$$f(x-1) + f(x+1) = 2 \cos k f(x) \quad (3.27)$$

そして、 $\sigma_{\ell\pm 1}^\pm \sigma_\ell^\mp |0\rangle = \delta_{x,\ell} \sigma_{\ell\pm 1}^\mp |0\rangle$ を用いて、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^N (\sigma_{\ell+1}^- \sigma_\ell^+ + \sigma_{\ell-1}^- \sigma_\ell^+) |1\rangle &= \sum_{\ell=1}^N \sum_{x=1}^N f(x) (\sigma_{x+1}^- |0\rangle + \sigma_{x-1}^- |0\rangle) \\ &= \sum_{x=1}^N (f(x-1) + f(x+1)) \sigma_x^- |0\rangle \\ &= 2 \cos k \sum_{x=1}^N f(x) \sigma_x^- |0\rangle \end{aligned} \quad (3.28)$$

ここで変数のシフト ($x \rightarrow x-1$ および $x \rightarrow x+1$) を実行した際に波動関数の周期的条件と同時にスピン演算子の周期的境界条件: $\vec{\sigma}_{x+N} = \vec{\sigma}_x$ を用いた。

(2) $M = 2$ の場合

下向きスピンの2個ある場合から、厳密な取り扱いはやや面倒になる。特に、周期的境界条件と座標領域の条件 $1 \leq x_1 < x_2 \leq N$ の二つを同時に扱うのは、厳密に示すことは可能であるが、あまり見易くはない。

分かり易く説明する方法として、座標領域を拡大するやり方を議論しよう。つまり、 $1 \leq x_1 \leq N$ および $1 \leq x_2 \leq N$ を満たす $N \times N$ の正方格子点全体を定義領域とする波動関数 $\psi(x_1, x_2)$ を考えよう。以下のように定義する。

$$\psi(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}f(x_1, x_2) & \text{for } x_1 < x_2 \\ \frac{1}{2}f(x_2, x_1) & \text{for } x_2 < x_1 \\ f(x_1, x_1) & \text{for } x_1 = x_2 \end{cases} \quad (3.29)$$

また周期格子上のクロネッカーのデルタを、以下のように定義する。

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{for } j \equiv k \pmod{N} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.30)$$

このとき、下向きスピンの2個のベータ仮設ベクトル $|2\rangle$ は、以下のように正方格子点全体で定義された波動関数 $\psi(x_1, x_2)$ を用いて表される。

$$\begin{aligned} |2\rangle &= \sum_{1 \leq x_1 < x_2 \leq N} f(x_1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle \\ &= \sum_{1 \leq x_1 < x_2 \leq N} \frac{1}{2} f(x_1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \sum_{1 \leq x_1 < x_2 \leq N} \frac{1}{2} f(x_1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle \\ &= \sum_{1 \leq x_1 < x_2 \leq N} \frac{1}{2} f(x_1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \sum_{1 \leq x_2 < x_1 \leq N} \frac{1}{2} f(x_2, x_1) \sigma_{x_2}^- \sigma_{x_1}^- |0\rangle \\ &= \sum_{1 \leq x_1 < x_2 \leq N} \psi(x_1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \sum_{1 \leq x_2 < x_1 \leq N} \psi(x_1, x_2) \sigma_{x_2}^- \sigma_{x_1}^- |0\rangle \\ &= \sum_{x_1, x_2=1}^N \psi(x_1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle \end{aligned} \quad (3.31)$$

次に、XXXハミルトニアンを具体的に考察しよう。まず最初に、ベータ仮設ベクトル $|2\rangle$ において、二つのスピンの同じ格子点にある場合はゼロになることを次式の右辺のように式で表現しておく。

$$|2\rangle = \sum_{x_1, x_2=1}^N \psi(x_1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle = \sum_{x_1, x_2=1}^N \psi(x_1, x_2) (1 - \delta_{x_1, x_2}) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle \quad (3.32)$$

この右辺に昇降演算子を作用させ、変数のシフト ($x_1 \rightarrow x_1 - 1$ および $x_2 \rightarrow x_2 - 1$) を行くと、以下のように計算される。

$$\begin{aligned} & (\sigma_{\ell+1}^- \sigma_{\ell}^+) \sum_{x_1, x_2=1}^N \psi(x_1, x_2) (1 - \delta_{x_1, x_2}) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle \\ &= \sum_{x_1, x_2=1}^N \psi(x_1, x_2) (1 - \delta_{x_1, x_2}) \left(\delta_{\ell x_1} \sigma_{x_1+1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle + \delta_{\ell x_2} \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2+1}^- |0\rangle \right) \\ &= \sum_{x_1, x_2=1}^N g(\psi(x_1 - 1, x_2) (1 - \delta_{x_1-1, x_2}) \delta_{\ell, x_1-1} + \psi(x_1, x_2 - 1) (1 - \delta_{x_1, x_2-1}) \delta_{\ell, x_2-1}) \\ & \quad \times \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle \end{aligned} \quad (3.33)$$

ここでデルタ関数の引数の周期性 $\delta_{x+N,y} = \delta_{x,y}$ を用いた。こうして次式を得る。

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{\ell=1}^N \sigma_{\ell+1}^- \sigma_{\ell}^+ \right) |2\rangle \\
 &= \sum_{x_1, x_2=1}^N (\psi(x_1 - 1, x_2)(1 - \delta_{x_1-1, x_2}) + \psi(x_1, x_2 - 1)(1 - \delta_{x_1, x_2-1})) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

同様にして、次式を得る。

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{\ell=1}^N \sigma_{\ell-1}^- \sigma_{\ell}^+ \right) |2\rangle \\
 &= \sum_{x_1, x_2=1}^N (\psi(x_1 + 1, x_2)(1 - \delta_{x_1+1, x_2}) + \psi(x_1, x_2 + 1)(1 - \delta_{x_1, x_2+1})) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

次に、対角項を計算する。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{2} (\sigma_{\ell}^Z - 1) (\sigma_{\ell+1}^Z - 1) |2\rangle \\
 &= \frac{1}{2} (\sigma_{\ell}^Z - 1) (\sigma_{\ell+1}^Z - 1) \sum_{x_1, x_2=1}^N \psi(x_1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle \\
 &= \sum_{x_1, x_2=1}^N \psi(x_1, x_2) \frac{1}{2} (-2) (\delta_{\ell, x_1} + \delta_{\ell, x_2}) (-2) (\delta_{\ell, x_1-1} + \delta_{\ell, x_2-1}) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle \\
 &= \sum_{x_1, x_2=1}^N 2 (\delta_{\ell, x_1} \delta_{\ell, x_2-1} + \delta_{\ell, x_2} \delta_{\ell, x_1-1}) \psi(x_1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

以上の数式 (3.34) 、(3.35) そして (3.36) の計算結果をまとめると、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\ell=1}^N \left(\sigma_{\ell+1}^- \sigma_{\ell}^+ + \sigma_{\ell-1}^- \sigma_{\ell}^+ + \frac{1}{2} (\sigma_{\ell}^Z - 1) (\sigma_{\ell+1}^Z - 1) \right) |2\rangle \\
 &= \sum_{x_1, x_2=1}^N \left\{ \psi(x_1 - 1, x_2)(1 - \delta_{x_1-1, x_2}) + \psi(x_1, x_2 - 1)(1 - \delta_{x_1, x_2-1}) \right. \\
 & \quad \left. \psi(x_1 + 1, x_2)(1 - \delta_{x_1+1, x_2}) + \psi(x_1, x_2 + 1)(1 - \delta_{x_1, x_2+1}) \right. \\
 & \quad \left. + 2 (\delta_{x_1, x_2-1} + \delta_{x_2, x_1-1}) \psi(x_1, x_2) \right\} \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle \\
 &= \sum_{x_1, x_2=1}^N \left\{ \sum_{s=\pm 1} (\psi(x_1 + s, x_2) + \psi(x_1, x_2 + s)) \right. \\
 & \quad \left. - \delta_{x_1+1, x_2} (\psi(x_1, x_2 - 1) + \psi(x_1 + 1, x_2) - 2\psi(x_1, x_2)) \right. \\
 & \quad \left. - \delta_{x_1-1, x_2} (\psi(x_1 - 1, x_2) + \psi(x_1, x_2 + 1) - 2\psi(x_1, x_2)) \right\} \psi(x_1, x_2) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle \\
 &= \sum_{x_1, x_2=1}^N \sum_{s=\pm 1} (\psi(x_1 + s, x_2) + \psi(x_1, x_2 + s)) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{x_1=1}^N (\psi(x_1, x_1) + \psi(x_1 + 1, x_1 + 1) - 2\psi(x_1, x_1 + 1)) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_1+1}^- |0\rangle \\
& - \sum_{x_1=1}^N (\psi(x_1 - 1, x_1 - 1) + \psi(x_1, x_1) - 2\psi(x_1, x_1 - 1)) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_1-1}^- |0\rangle \quad (3.37)
\end{aligned}$$

ここで $x_1 < x_2$ ならば $x_1 + 1 \leq x_2$ であることに注意すると、 $x_1 < x_2$ のときは $\psi(x_1 \pm 1, x_2) = f(x_1 \pm 1, x_2)/2$ であり、 $x_1 > x_2$ のときは $\psi(x_1 \pm 1, x_2) = f(x_2, x_1 \pm 1)/2$ である。よって、

$$\begin{aligned}
& \sum_{\ell=1}^N (\sigma_{\ell+1}^- \sigma_{\ell}^+ + \sigma_{\ell-1}^- \sigma_{\ell}^+ + \frac{1}{2} (\sigma_{\ell}^Z - 1) (\sigma_{\ell+1}^Z - 1)) |2\rangle \\
& = \sum_{x_1, x_2=1}^N \sum_{s=\pm 1} (f(x_1 + s, x_2) + f(x_1, x_2 + s)) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_2}^- |0\rangle \\
& \quad - \sum_{x_1=1}^N (f(x_1, x_1) + f(x_1 + 1, x_1 + 1) - 2f(x_1, x_1 + 1)) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_1+1}^- |0\rangle \quad (3.38)
\end{aligned}$$

ベーテ仮説ベクトルは、言わば平面波の重ね合わせなので、次が導かれる。

$$\sum_{s=\pm 1} (f(x_1 + s, x_2) + f(x_1, x_2 + s)) = (2 \cos k_1 + 2 \cos k_2) f(x_1, x_2) \quad (3.39)$$

ハミルトニアン の作用は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
& \sum_{\ell=1}^N \left(\sigma_{\ell+1}^- \sigma_{\ell}^+ + \sigma_{\ell-1}^- \sigma_{\ell}^+ + \frac{1}{2} (\sigma_{\ell}^Z - 1) (\sigma_{\ell+1}^Z - 1) \right) |2\rangle \\
& = (2 \cos k_1 + 2 \cos k_2) |2\rangle \\
& \quad - \sum_{x_1=1}^N (f(x_1, x_1) + f(x_1 + 1, x_1 + 1) - 2f(x_1, x_1 + 1)) \sigma_{x_1}^- \sigma_{x_1+1}^- |0\rangle \quad (3.40)
\end{aligned}$$

以上の計算から、ベーテ仮説ベクトル $|2\rangle$ が XXX ハミルトニアン の固有ベクトルであるための必要十分条件は、周期的境界条件の下で次式が成立することである。

$$f(x, x) + f(x + 1, x + 1) - 2f(x, x + 1) = 0 \quad \text{for } x = 1, \dots, N \quad (3.41)$$

ベーテ仮説波動関数を上式に代入して、振幅に対する条件を調べよう。

$$\begin{aligned}
& f(x, x) + f(x + 1, x + 1) - 2f(x, x + 1) \\
& = \sum_{P \in S_2} A(P) e^{i(k_{P1} + k_{P2})x} + \sum_{P \in S_2} A(P) e^{i(k_{P1} + k_{P2})(x+1)} - 2 \sum_{P \in S_2} A(P) e^{i\{k_{P1}x + k_{P2}(x+1)\}} \\
& = \sum_{P \in S_2} A(P) (1 + e^{i(k_{P1} + k_{P2})} - 2e^{ik_{P2}}) e^{i(k_{P1} + k_{P2})x} \\
& = e^{i(k_1 + k_2)x} \sum_{P \in S_2} A(P) (1 + e^{i(k_{P1} + k_{P2})} - 2e^{ik_{P2}}) \quad (3.42)
\end{aligned}$$

以上の計算から、必要十分条件は次式であることが分かる。

$$\sum_{P \in S_2} A(P) (1 + e^{i(k_{P1} + k_{P2})} - 2e^{ik_{P2}}) = 0 \quad (3.43)$$

具体的には、次式となる。

$$A(12) (1 + e^{i(k_1 + k_2)} - 2e^{ik_2}) + A(21) (1 + e^{i(k_1 + k_2)} - 2e^{ik_1}) = 0 \quad (3.44)$$

これを振幅 $A(21)$ と $A(12)$ の関係を与える式であるとみなすと、

$$\frac{A(21)}{A(12)} = (-1) \frac{1 + e^{i(k_1 + k_2)} - 2e^{ik_2}}{1 + e^{i(k_1 + k_2)} - 2e^{ik_1}} \quad (3.45)$$

と表される。

(3) 一般の M の場合

領域 $1 \leq x_1 < \dots < x_M \leq N$ の条件を簡単に表現するため、領域を一辺の長さが N の M 次元超立方格子に拡張してみよう。新しい波動関数 $\psi(x_1, \dots, x_M)$ を定義する。 $j = 1, \dots, M$ に対して $1 \leq x_j \leq N$ を満たす格子点の列 x_1, \dots, x_M を任意に与えたとき、これらの座標点を小さい方から順番に並べ直す置換 Q が存在し、 $1 \leq x_{Q1} \leq \dots \leq x_{QM} \leq N$ となる。このとき、新しい波動関数 $\psi(x_1, \dots, x_M)$ を次式で定める。

$$\psi(x_1, \dots, x_M) = \frac{1}{M!} f(x_{Q1}, \dots, x_{QM}) \quad (3.46)$$

ベーテ仮設ベクトルはこの新しい波動関数で次のように表される。

$$|M\rangle = \sum_{x_1, \dots, x_M=1}^N \psi(x_1, \dots, x_M) \sigma_{x_1}^- \dots \sigma_{x_M}^- |0\rangle \quad (3.47)$$

新しい波動関数を用いると、ベーテ仮設ベクトルに対する XXX ハミルトニアン の主要部の作用は以下のように表される。

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^N \left\{ \sigma_{\ell+1}^- \sigma_{\ell}^+ + \sigma_{\ell-1}^- \sigma_{\ell}^+ + \frac{1}{2} (\sigma_{\ell}^z - 1) (\sigma_{\ell+1}^z - 1) \right\} |M\rangle \\ &= \sum_{x_1, \dots, x_M=1}^N \left[\sum_{j=1}^M \sum_{s=\pm 1} \psi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + s, x_{j+1}, \dots, x_M) \right. \\ & \quad - \sum_{1 \leq j < k \leq M} \left\{ \delta_{x_{j+1}, x_k} (\psi(x_j, x_k - 1) + \psi(x_j + 1, x_k) - 2\psi(x_j, x_k)) \right. \\ & \quad \left. \left. + \delta_{x_{j-1}, x_k} (\psi(x_j, x_k + 1) + \psi(x_j - 1, x_k) - 2\psi(x_j, x_k)) \right\} \right] \sigma_{x_1}^- \dots \sigma_{x_M}^- |0\rangle \end{aligned} \quad (3.48)$$

よって周期的境界条件の下で次式が成り立つことが、ベーテ仮設ベクトルが固有ベクトルとなるための必要十分条件である。

$$\sum_{1 \leq x_1 < \dots < x_M \leq N} \sum_{j=1}^{M-1} \left(f(x_1, \dots, x_{j-1}, \overbrace{x_j}^j, \overbrace{x_j}^{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_M) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + f(x_1, \dots, x_{j-1}, \overbrace{x_j+1}^j, \overbrace{x_j+1}^{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_M) \\
& - 2f(x_1, \dots, x_{j-1}, \overbrace{x_j}^j, \overbrace{x_j+1}^{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_M) \Big) \delta_{x_{j+1}, x_j+1} \sigma_{x_1}^- \cdots \sigma_{x_M}^- |0\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

上の表現では演算子の周期性とデルタ関数の引数の周期性が仮定されていることに注意する。

隣り合う二つの整数 j と $j+1$ の互換 $(j, j+1)$ を記号 π_j で表す。任意の置換 P に対して

$$A(P) \left(1 + e^{i(k_{Pj} + k_{P(j+1)})} - 2e^{ik_{P(j+1)}} \right) + A(P\pi_j) \left(1 + e^{i(k_{Pj} + k_{P(j+1)})} - 2e^{ik_{Pj}} \right) = 0 \tag{3.50}$$

であるとき、

$$\begin{aligned}
& f(x_1, \dots, x_{j-1}, \overbrace{x_j}^j, x_j, x_{j+2}, \dots, x_M) + f(x_1, \dots, x_{j-1}, \overbrace{x_j+1}^j, x_j+1, x_{j+2}, \dots, x_M) \\
& - 2f(x_1, \dots, x_{j-1}, \overbrace{x_j}^j, x_j+1, x_{j+2}, \dots, x_M) = 0
\end{aligned} \tag{3.51}$$

が成立する。波動関数に対する周期的境界条件が成立するとき、条件 (3.50) は、ベーテ仮説ベクトルが XXX ハミルトニアン固有ベクトルであるための十分条件である。これを振幅 $A(P)$ と $A(P\pi_j)$ の関係式とみなすと、

$$\frac{A(P\pi_j)}{A(P)} = (-1) \frac{1 + \exp\{i(k_{Pj} + k_{P(j+1)})\} - 2\exp(ik_{P(j+1)})}{1 + \exp\{i(k_{Pj} + k_{P(j+1)})\} - 2\exp(ik_{Pj})} \tag{3.52}$$

ただし分母の振幅 $A(P)$ はゼロでないと仮定した。一般にはゼロでないと限らず、特にハミルトニアンに対称性がある場合はゼロになる振幅も存在する。

3.4 振幅に対する関係式 (固有ベクトルの十分条件) の無矛盾性

振幅に対する関係式 (3.52) に矛盾がないことを議論しよう。そのためには、対称群の知識が少し必要である。

簡単のため、下向きスピンの 3 個の場合を考える。まず、自明な置換 e に対する振幅を $A(e)$ とする。そして、互換 (13) に対する振幅を関係式 (3.52) を用いて求めてみよう。関係式 (3.52) は j と $j+1$ の引き続く正整数の互換 $\pi_j = (j, j+1)$ に対して与えられる。そこで、互換 (13) を $\pi_1 = (12)$ と $\pi_2 = (23)$ を用いて表そう。容易に示せるように $(13) = (12)(23)(12) = \pi_1\pi_2\pi_1$ である。よって振幅 $A(13)$ は以下のように求められる。

$$\begin{aligned}
A(13) &= \frac{A(\pi_1\pi_2\pi_1)}{A(e)} \cdot A(e) \\
&= \frac{A((\pi_1\pi_2)\pi_1)}{A(\pi_1\pi_2)} \cdot \frac{A(\pi_1\pi_2)}{A(\pi_1)} \cdot \frac{A(\pi_1)}{A(e)} \cdot A(e)
\end{aligned} \tag{3.53}$$

上式中の三つの積は各々以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 \frac{A((\pi_1\pi_2)\pi_1)}{A(\pi_1\pi_2)} &= \frac{1 + \exp(ik_{\pi_1\pi_21} + ik_{\pi_1\pi_22}) - 2\exp(ik_{\pi_1\pi_22})}{1 + \exp(ik_{\pi_1\pi_21} + ik_{\pi_1\pi_22}) - 2\exp(ik_{\pi_1\pi_21})} \\
 &= \frac{1 + \exp(ik_2 + ik_3) - 2\exp(ik_3)}{1 + \exp(ik_2 + ik_3) - 2\exp(ik_2)} \\
 \frac{A(\pi_1\pi_2)}{A(\pi_1)} &= \frac{1 + \exp(ik_{\pi_12} + ik_{\pi_13}) - 2\exp(ik_{\pi_13})}{1 + \exp(ik_{\pi_12} + ik_{\pi_13}) - 2\exp(ik_{\pi_12})} \\
 &= \frac{1 + \exp(ik_1 + ik_3) - 2\exp(ik_3)}{1 + \exp(ik_2 + ik_3) - 2\exp(ik_1)} \\
 \frac{A(\pi_1)}{A(e)} &= \frac{1 + \exp(ik_1 + ik_2) - 2\exp(ik_2)}{1 + \exp(ik_1 + ik_2) - 2\exp(ik_1)} \quad (3.54)
 \end{aligned}$$

互換 (13) は $(13) = (23)(12)(23)$ と表される。つまり 2 通りの表し方がある。

$$(13) = \pi_1\pi_2\pi_1 = \pi_2\pi_1\pi_2 \quad (3.55)$$

この二つのうちのどちらを用いて振幅 $A(13)$ を求めても結果が一致しなければならない。実際、 $\pi_2\pi_1\pi_2$ の表式を用いても同じ結果が導かれることを、以下に示す。

$$\begin{aligned}
 A(13) &= \frac{A(\pi_2\pi_1\pi_2)}{A(e)} \cdot A(e) \\
 &= \frac{A((\pi_2\pi_1)\pi_2)}{A(\pi_2\pi_1)} \cdot \frac{A(\pi_2\pi_1)}{A(\pi_1)} \cdot \frac{A(\pi_2)}{A(e)} \cdot A(e) \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

ここで上式中の三つの積は各々以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 \frac{A((\pi_2\pi_1)\pi_2)}{A(\pi_2\pi_1)} &= \frac{1 + \exp(ik_{\pi_2\pi_12} + ik_{\pi_2\pi_13}) - 2\exp(ik_{\pi_2\pi_13})}{1 + \exp(ik_{\pi_2\pi_12} + ik_{\pi_2\pi_13}) - 2\exp(ik_{\pi_2\pi_12})} \\
 &= \frac{1 + \exp(ik_1 + ik_2) - 2\exp(ik_2)}{1 + \exp(ik_1 + ik_2) - 2\exp(ik_1)} \\
 \frac{A(\pi_2\pi_1)}{A(\pi_2)} &= \frac{1 + \exp(ik_{\pi_21} + ik_{\pi_22}) - 2\exp(ik_{\pi_22})}{1 + \exp(ik_{\pi_21} + ik_{\pi_22}) - 2\exp(ik_{\pi_21})} \\
 &= \frac{1 + \exp(ik_1 + ik_3) - 2\exp(ik_3)}{1 + \exp(ik_1 + ik_3) - 2\exp(ik_1)} \\
 \frac{A(\pi_2)}{A(e)} &= \frac{1 + \exp(ik_2 + ik_3) - 2\exp(ik_3)}{1 + \exp(ik_2 + ik_3) - 2\exp(ik_2)} \quad (3.57)
 \end{aligned}$$

式 (3.54) の三つの振幅の比の積は、順番を変えると式 (3.57) と一致することが分かる。こうして、互換 (13) の 2 通りの表し方 (3.55) のどちらからも同じ振幅が導かれることが明らかになった。

それでは逆に、(3.53) と (3.56) が一致することを示すだけで十分なのであろうか。他には何か満たされるべき関係式は存在しないのであろうか。この問題は、対称群の生成演算子とその定義関係式を調べることで解決される。実は次のような事実が証明されている。⁶

⁶ Magnus, Karras and Solitar [17] を参照

Theorem 3.1 M 次の対称群 S_M は、次の定義関係式を満たす $M-1$ 個の演算子 π_1, \dots, π_{M-1} で生成される。

$$\pi_j^2 = e, \quad \text{for } j = 1, \dots, M-1 \quad (3.58)$$

$$\pi_j \pi_{j+1} \pi_j = \pi_{j+1} \pi_j \pi_{j+1} \quad \text{for } j = 1, \dots, M-2. \quad (3.59)$$

ここで e は単位元である。

対称群の任意の元は生成子 π_j の積で表され、その表し方の不定性は全て上の二種類の関係式 (3.58) と (3.59) から導かれるものだけである。よって、振幅 $A(P)$ の無矛盾性を証明するには、関係式 (3.58) と (3.59) が満たされていることを示せば良い。実際、一般の M の場合の確認も容易である。

3.5 ベーテ仮設方程式

振幅を決める関係式 (3.52) を用いて、波動関数に対する周期的境界条件を定式化しよう。まず具体的に $M=2$ と $M=3$ の場合を書き下してみよう。

(1) $M=2$ の場合

波動関数の境界条件は、 $A[21] \exp(ik_1 N) = A[12]$ および $A[12] \exp(ik_2) = A[21]$ という振幅に対する条件に帰着される。そこで関係式 (3.52) より、この2条件は次式に還元される。

$$\begin{aligned} \exp(ik_1 N) &= \frac{A[12]}{A[21]} = \frac{A(e)}{A(12)} \\ &= (-1) \frac{1 + \exp(ik_1 + ik_2) - 2 \exp(ik_1)}{1 + \exp(ik_1 + ik_2) - 2 \exp(ik_2)} \\ \exp(ik_2 N) &= \frac{A[21]}{A[12]} = \frac{A(12)}{A(e)} \\ &= (-1) \frac{1 + \exp(ik_1 + ik_2) - 2 \exp(ik_2)}{1 + \exp(ik_1 + ik_2) - 2 \exp(ik_1)} \end{aligned} \quad (3.60)$$

(2) $M=3$ の場合

対称群 S_3 の任意の要素 Q に対して、 $A(Q(123)) \exp(ik_{Q1}) = A(Q)$ が条件である。そこで関係式 (3.52) と $(123) = (12)(23)$ より、次が導かれる。

$$\begin{aligned} \exp(ik_{Q1}) &= \frac{A(Q)}{A(Q(123))} = \frac{A(Q)}{A(Q(12))} \cdot \frac{A(Q(12))}{A(Q(12)(23))} \\ &= (-1) \frac{1 + \exp(ik_{Q1} + ik_{Q2}) - 2 \exp(ik_{Q1})}{1 + \exp(ik_{Q1} + ik_{Q2}) - 2 \exp(ik_{Q2})} \\ &\quad \times (-1) \frac{1 + \exp(ik_{Q1} + ik_{Q3}) - 2 \exp(ik_{Q1})}{1 + \exp(ik_{Q1} + ik_{Q3}) - 2 \exp(ik_{Q3})} \end{aligned} \quad (3.61)$$

任意の置換 Q に対して成立するので、 $j = Q1$ とおくとこれは

$$\exp(iNk_j) = \prod_{\ell=1, \ell \neq j}^3 \frac{\exp i(k_j + k_\ell) + 1 - 2 \exp ik_j}{\exp i(k_j + k_\ell) + 1 - 2 \exp ik_\ell} \quad \text{for } j = 1, 2, 3. \quad (3.62)$$

とまとめられる。

(3) 一般の M の場合

$M = 3$ の場合の議論と同様にして、次の M 個の式が周期的境界条件と等価である。

$$\exp(iNk_j) = (-1)^{M-1} \prod_{\ell=1, \ell \neq j}^M \frac{\exp i(k_j + k_\ell) + 1 - 2 \exp ik_j}{\exp i(k_j + k_\ell) + 1 - 2 \exp ik_\ell}, \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, M. \quad (3.63)$$

これらの M 本の方程式の系を、ベーテ仮設方程式、とよぶ。

ベーテ仮設方程式 (3.63) を満たす M 個の未知数 k_1, \dots, k_M が求められれば、1 次元 XXX 模型の固有状態波動関数と同時にそのエネルギー固有値が次式により求められる。

$$E = \frac{J}{2} \sum_{j=1}^M 2 \cos k_j + J \left(\frac{N}{4} - M \right) \quad (3.64)$$

後々の便利のため、ベーテ仮設方程式を別の形に表そう。擬運動量 k_j に対してラピディティ λ_j を次式で定める。

$$\exp(ik_j) = \frac{\lambda_j + i}{\lambda_j - i} \quad (3.65)$$

すると次式より、

$$\frac{1 + \exp(ik_1 + ik_2) - 2 \exp(ik_2)}{1 + \exp(ik_1 + ik_2) - 2 \exp(ik_1)} = (-1) \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - 2i}{\lambda_1 - \lambda_2 + 2i} \quad (3.66)$$

ベーテ仮設方程式 (3.63) は次のように書き直される。

$$\left(\frac{\lambda_j + i}{\lambda_j - i} \right)^N = \prod_{\ell=1, \ell \neq j}^M \frac{\lambda_j - \lambda_\ell + 2i}{\lambda_j - \lambda_\ell - 2i}, \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, M. \quad (3.67)$$

3.6 ベーテ仮設固有ベクトルの数え上げとベーテ仮説の妥当性

ここで少しベーテ仮説の完全性を議論してみよう。下向きスピンの M 個の場合のベーテ仮設方程式の解の個数を $Z(N, M)$ とする。そして、それが次式で与えられると仮定する。

$$Z(N, M) = {}_N C_M - {}_N C_{M-1} \quad (3.68)$$

このとき、解の個数は必要十分であること、つまり全部で 2^N 個の固有ベクトルが導かれることを示そう。(${}_N C_M = N!/(M!(N-M)!)$ である。)

ベーテ仮設ベクトルは全スピン角運動量 $SU(2)$ の最高ウェイトであるので、 M 個の下向きスピンのベーテ仮設ベクトルの全スピン運動量の大きさは $(N-M)/2 - M/2 = (N-2M)/2$

である。このため、一つのベーテ仮設ベクトルから $N - 2M + 1$ 個の固有ベクトルが下降演算子 S_{tot}^- を作用させて導かれる。そこで、こうして導かれる全ての固有ベクトルの数を $Z(N)$ は次式のように計算される。

$$\begin{aligned}
 Z(N) &= \sum_{M=0}^{N/2} (N - 2M + 1) Z(N, M) \\
 &= \sum_{M=0}^{N/2} (N - 2M + 1) ({}_N C_M - {}_N C_{M-1}) \\
 &= \sum_{M=0}^{N/2} (N - 2M + 1) {}_N C_M - \sum_{M=1}^{N/2} (N - 2M + 1) {}_N C_{M-1} \\
 &= \sum_{M=0}^{N/2} (N - 2M + 1) {}_N C_M - \sum_{M=0}^{N/2-1} (N - 2M - 1) {}_N C_M \\
 &= {}_N C_{N/2} + 2 \sum_{M=0}^{N/2-1} {}_N C_M \\
 &= 2^N.
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

解の個数の表式 (3.68) は、 $SU(2)$ 対称性の観点からも都合が良い。実は、ベーテ仮設固有ベクトルは \vec{S}_{tot} の作る $SU(2)$ 対称性に関する最高ウェイト状態であることが証明されている。[6, 7] 一方、下向スピンの M 個の状態ベクトルは全部で ${}_N C_M$ 個存在する。このうち、 ${}_N C_{M-1}$ 個は、下向スピンの $M - 1$ 個の状態ベクトルに下げ演算子をかけて導かれる。そこで、表式 (3.68) が導かれるというわけである。

以上をまとめる。もしベーテ仮設方程式の解の個数が 式 (3.68) で与えられるならば、ベーテ仮説の方法により全ての固有値が尽くされることが分かった。しかし、問題はベーテ仮設方程式の解の個数が 式 (3.68) であることの証明である。

3.7 スピン波理論との関係

ベーテ仮設波動関数はスピン波（マグノン）の波動関数と形式的には良く似ている。しかしマグノンはボソンであり同じ状態の粒子が複数個存在可能なのに対して、ベーテ仮設法では二つの粒子が同じ擬格子運動量を持つことはできないという一種の「パウリ原理」が成立する。[8]（これを、ベーテ仮説の「パウリ原理」と呼ぼう。）このことはベーテ仮設波動関数の振幅を具体的に求めると明らかになる。また、磁場ゼロ下での反強磁性基底状態における素励起は、後にみるようにスピノンというキーク解であり、スピン波とは本質的に異なる。

磁場が存在する場合、XXX 模型の基底状態からの励起を広義のマグノンによるものであると解釈する場合もある。ただし、見かけは似ているが、通常のボソンとしてのスピン波とは全く異なるものとして理解すべきである。

4 2次元古典系の厳密解

4.1 6バーテックス模型

2次元正方格子上に定義された6バーテックス模型 (6-vertex model) を解説しよう。この模型はもともと誘電体の平衡状態の統計力学を研究するために導入され、2次元系の可解格子模型の代表例である。

2次元正方格子の各頂点に原子が位置し、各辺の上にはプラスあるいはマイナスの矢印が配置され、分極ベクトルを表すものとする。分極の大きさは ± 1 である。4個の分極が各々2個の状態をとることによって、全部で16通りの配置が可能である。

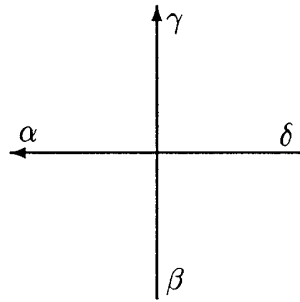


図 4.1: 頂点の周りの分極の配置： $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ；水平左向き、垂直上向きが正方向。

図のように頂点の周りの分極の値を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ という変数で表そう。このとき、各々の頂点の周りの電荷分布は中性でなければならない。電荷分布の中性条件は次式で与えられる。

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta \quad (4.1)$$

誘電体として氷を考える場合には、この条件はアイス・ルールともよばれる。もし $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ であると、頂点のまわりに正あるいは負の電荷が出現するがそれはエネルギー的に不利であり、平衡状態では存在しないと考えられる。そこで、全部で $2^4 = 16$ 通りの分極の配置の中で中性条件を満たす6通りの配置だけが実現する。そして、頂点のまわりの分極の配置を6個しか考えないため、6バーテックス模型 (six-vertex model) という名前が付けられた。

後の便利のため、分極の値 $+1$ と -1 を添え字では各々1と2で表すことにする。頂点のまわりの分極の配置を矢印で表した場合と数字で表す場合は、図のように対応している。

頂点の周りの分極の値が $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ という配置のとき、この配置に対応するエネルギーが存在し、 $\epsilon(\alpha, \beta | \gamma, \delta)$ であるものとする。ただし $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は1あるいは2の値をとるものとする。分極が中性条件を満たすように配置するとき、エネルギーが配置によって異なると考える。あるいは、中性条件を満たさない配置のエネルギーは無限大であると考えてもよい。系の温度を T とするとき、次をボルツマン重率 (Boltzmann weight) とよぶ。

$$w(\alpha, \beta | \gamma, \delta) = \exp(-\epsilon(\alpha, \beta | \gamma, \delta)/k_B T) \quad (4.2)$$

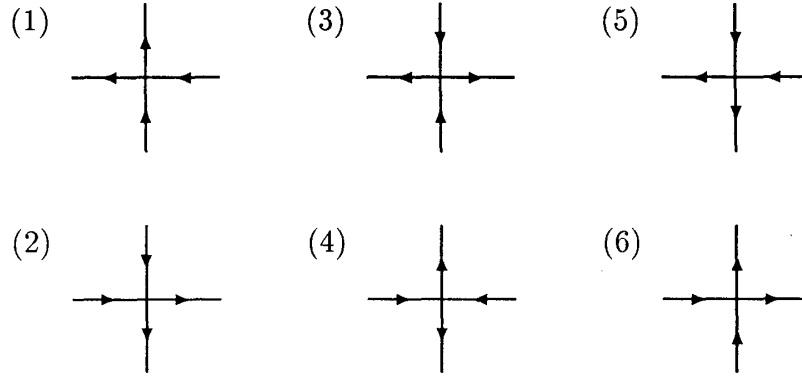


図 4.2: アイス・ルールを満たす分極の配置。ボルツマン重率 $w(\alpha, \beta | \gamma, \delta)$ と以下のように対応: (1) $w(1, 1 | 1, 1)$; (2) $w(2, 2 | 2, 2)$; (3) $w(1, 1 | 2, 2)$; (4) $w(2, 2 | 1, 1)$; (5) $w(1, 2 | 2, 1)$; (6) $w(2, 1 | 1, 2)$.

分配関数を計算すると、系の平衡状態の様子が分かる。分配関数を求めるには、例えば周期的境界条件を仮定し、各頂点のボルツマン重率の積を計算し、全ての配置に関して和をとる。

$$Z = \sum_{\text{config}} \prod_{j: \text{vertices}} w(a_j, b_j | c_j, d_j) \quad (4.3)$$

分配関数 Z は転送行列 τ の積で与えられるので、転送行列の固有値 Λ_j を求めることが数学的な課題となる。正方格子の一边の格子点数を N とする。転送行列の行列要素は次式のように、ボルツマン重率の積の和で与えられる。

$$\tau_{b_1, \dots, b_N}^{a_1, \dots, a_N} = \sum_{c_1, \dots, c_N} w(c_1, b_1 | a_1, c_2) w(c_2, b_2 | a_2, c_3) \cdots w(c_N, b_N | a_N, c_1) \quad (4.4)$$

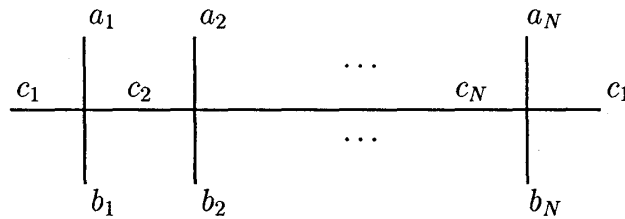


図 4.3: 転送行列の行列要素 $\tau_{b_1, \dots, b_N}^{a_1, \dots, a_N}$

2次元正方格子の境界条件が周期的である場合、転送行列の積 τ^N のトレースが分配関数を与える。

$$Z = \text{Tr}(\tau^N) = \sum_{a_1, \dots, a_N} (\tau^N)_{a_1, \dots, a_N}^{a_1, \dots, a_N} = \Lambda_1^N + \Lambda_2^N + \cdots + \Lambda_N^N \quad (4.5)$$

そこで、もし転送行列の固有値が求まるならば、分配関数はそのべき和で表される。

$$Z = \Lambda_1^N + \Lambda_2^N + \cdots + \Lambda_N^N \quad (4.6)$$

系の格子点当たりの自由エネルギー f は $f = -k_B T (\log Z) / N^2$ で与えられる。特に、励起エネルギーにギャップがある場合、つまり最大固有値と第二固有値の比がある程度以上ある場合、無限系の自由エネルギーは最大固有値のみを用いて表される。

6 バーテックス模型を誘電体の模型として研究する物理学的な意義が現在でもあるかどうか、筆者にすぐに断言する自信はない。しかし、1次元量子スピン系の可解模型として代表的な X X X 模型が2次元古典統計系の可解模型と数理解物理学的に対応することは現在でも重要な事実であり、このことから見かけの異なる様々な可解模型の関連性が理解できる。

4.2 独立なボルツマン重率の個数

分配関数の値の微視的な変数表示を考えよう。分配関数あるいは転送行列はボルツマン重率の積の状態和で与えられ、ボルツマン重率は系の温度と微視的な配置エネルギーを与えると一意的に定められる。そこで、ボルツマン重率をどのように変数表示するかが問題となる。

電荷中性条件（アイス・ルール）を課すと、6バーテックス模型の頂点のまわりの分極の配置は6通りであった。これらの配置に対応するエネルギーは対称性を考慮すると、2配置ずつ同じ値になり、異なる配置エネルギーは全部で3種類だけである。

$$\begin{aligned} w(1,1|1,1) &= w(2,2|2,2) = w_1 = a \\ w(1,1|2,2) &= w(2,2|1,1) = w_2 = b \\ w(1,2|2,1) &= w(2,1|1,2) = w_3 = c \end{aligned} \quad (4.7)$$

ここで重率 w_1, w_2, w_3 は簡単に a, b, c とも表す。独立なボルツマン重率は3個であるがさらに全体の規格化因子を自由に選べるので、本質的な独立変数は2個である。実際、6バーテックス模型の相図はボルツマン重率の比 a/c および b/c を用いて表示できる。

ボルツマン重率（統計重率）を用いて模型を定義する場合、原理的にはボルツマン重率の値が異なれば、違った模型を表すと考えられる。しかし実際には、次節で見るように $\Delta = (a^2 + b^2 - c^2)/(2ab)$ の値が重要で、この値が同じ模型は転送行列が交換し、同じ固有ベクトルを共有する。

4.3 ヤン・バクスター関係式と転送行列の交換

本節では6バーテックス模型のヤン・バクスター関係式 (Yang-Baxter relations) を議論する。標語的には、ボルツマン重率がヤン・バクスター関係式を満たすと、その転送行列は交換する。

3種類の異なるボルツマン重率の組み $(w_1, w_2, w_3) = (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'')$ を考えよう。そして、 (a', b', c') と (a'', b'', c'') から導かれる転送行列を各々 τ' および τ'' としよう。これらのボルツマン重率の組みがヤン・バクスター関係式という次式のような関係

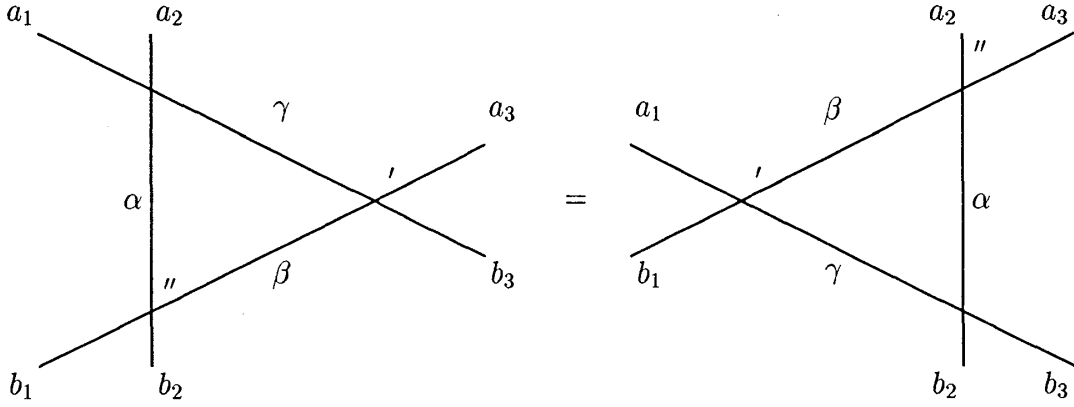


図 4.4: ヤン・バクスター関係式

式を満たすとき、転送行列 τ' と τ'' は交換する。

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha, \beta, \gamma} w(a_1, \alpha | a_2, \gamma) w'(\gamma, \beta | a_3, b_3) w''(\alpha, b_1 | \beta, b_2) \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} w''(a_2, \beta | a_3, \alpha) w'(a_1, b_1 | \beta, \gamma) w(\gamma, b_2 | \alpha, b_3) \end{aligned} \quad (4.8)$$

転送行列の交換を分かり易く示す道具として、モノドロミー行列を導入する。モノドロミー行列は 2 行 2 列の行列でその行列要素は演算子あるいは N 階のテンソルである。その α 行 β 列成分は、以下のように定義される。

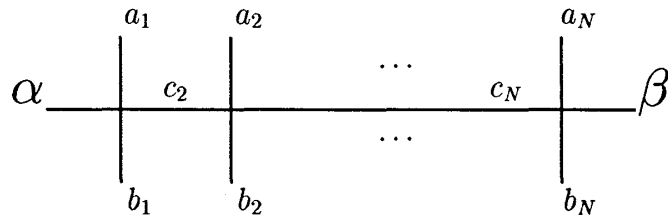
$$(T_{\alpha, \beta})_{b_1, \dots, b_N}^{a_1, \dots, a_N} = \sum_{c_2, \dots, c_N} w(\alpha, b_1 | a_1, c_2) w(c_2, b_2 | a_2, c_3) \cdots w(c_N, b_N | a_N, \beta) \quad (4.9)$$

転送行列はモノドロミー行列のトレースとして定式化される。

$$\tau = \text{tr}(T) = \sum_{\alpha=1,2} T_{\alpha, \alpha} \quad (4.10)$$

モノドロミー行列の成分表示では以下ようになる。

$$(\tau)_{b_1, \dots, b_N}^{a_1, \dots, a_N} = \sum_{\alpha=1,2} (T_{\alpha, \alpha})_{b_1, \dots, b_N}^{a_1, \dots, a_N} \quad (4.11)$$

図 4.5: モノドロミー行列の (α, β) 成分の行列要素: $(T_{\alpha, \beta})_{b_1, \dots, b_N}^{a_1, \dots, a_N}$

ボルツマン重率の組 (a', b', c') と (a'', b'', c'') から導かれるモノドロミー行列を各々 T' および T'' とする。まずモノドロミー行列の行列要素同士の積 $T'_{\alpha, \beta} T''_{\gamma, \delta}$ を考える。その (a_1, \dots, a_N) 行 (b_1, \dots, b_N) 列成分は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 (T'_{\gamma_1, \gamma_{N+1}} T''_{\delta_1, \delta_{N+1}})_{b_1, \dots, b_N}^{a_1, \dots, a_N} &= \sum_{e_1, \dots, e_N} (T'_{\gamma_1, \gamma_{N+1}})_{e_1, \dots, e_N}^{a_1, \dots, a_N} (T''_{\delta_1, \delta_{N+1}})_{b_1, \dots, b_N}^{e_1, \dots, e_N} \\
 &= \sum_{e_1, \dots, e_N} \sum_{c_2, \dots, c_N} w'(\gamma_1, e_1 | a_1, c_2) w'(c_2, e_2 | a_2, c_3) \cdots w'(c_N, e_N | a_N, \gamma_{N+1}) \\
 &\quad \times \sum_{d_2, \dots, d_N} w''(\delta_1, b_1 | e_1, d_2) w''(d_2, b_2 | e_2, d_3) \cdots w''(d_N, b_N | e_N, \delta_{N+1}) \\
 &= \sum_{c_2, \dots, c_N} \sum_{d_2, \dots, d_N} \sum_{e_1, \dots, e_N} w'(\gamma_1, e_1 | a_1, c_2) w''(\delta_1, b_1 | e_1, d_2) \cdot w'(c_2, e_2 | a_2, c_3) w''(d_2, b_2 | e_2, d_3) \cdot \\
 &\quad \cdots w'(c_N, e_N | a_N, \gamma_{N+1}) w''(d_N, b_N | e_N, \delta_{N+1}) \\
 &= \sum_{c_2, \dots, c_N} \sum_{d_2, \dots, d_N} S(a_1, b_1)_{\delta_1, d_2}^{\gamma_1, c_2} \cdot S(a_2, b_2)_{d_2, d_3}^{c_2, c_3} \cdots S(a_N, b_N)_{d_N, \delta_{N+1}}^{c_N, \gamma_{N+1}} \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

ここで $S(a_j, b_j)_{d_j, d_{j+1}}^{c_j, c_{j+1}}$ は次式で定義される。

$$S(a_j, b_j)_{d_j, d_{j+1}}^{c_j, c_{j+1}} = \sum_{e_j} w'(c_j, e_j | a_j, c_{j+1}) w''(d_j, b_j | e_j, d_{j+1}) \quad (4.13)$$

行列 M の行列要素 $M_{d_0, d_1}^{c_0, c_1}$ を次のように定める。

$$M_{d_0, d_1}^{c_0, c_1} = w(d_0, d_1 | c_0, c_1) \quad (4.14)$$

行列 M の (c_0, d_0) 行 (c_1, d_1) 列の行列要素は $M_{d_0, d_1}^{c_0, c_1}$ であるものとする。この行列 M を用い、ヤン・バクスター関係式を繰り返し適用して、次のような関係式を示せる。

$$\sum_{c_1, d_1} M_{\delta_0, d_1}^{\gamma_0, c_1} T'_{c_1, \gamma_{N+1}} T''_{d_1, \delta_{N+1}} = \sum_{c_{N+1}, d_{N+1}} T''_{c_1, c_{N+1}} T'_{d_1, d_{N+1}} M_{d_N, \delta_{N+1}}^{c_N, \gamma_{N+1}} \quad (4.15)$$

関係式を証明しよう。図 4.6 に証明の概略が描かれている。その最初の部分では、以下の等式が用いられている。

$$\sum_{c_1, d_1} M_{\delta_0, d_1}^{\gamma_0, c_1} S(a_1, b_1)_{d_1, d_2}^{c_1, c_2} = \sum_{c_1, d_1} S'(a_1, b_1)_{\delta_0, d_1}^{\gamma_0, c_1} M_{d_1, d_2}^{c_1, c_2} \quad (4.16)$$

上式はヤン・バクスター関係式そのものであり、記号 $S'(a_j, b_j)_{d_j, d_{j+1}}^{c_j, c_{j+1}}$ は次で定義される。

$$S'(a_j, b_j)_{d_j, d_{j+1}}^{c_j, c_{j+1}} = \sum_{e_j} w''(c_j, e_j | a_j, c_{j+1}) w'(d_j, b_j | e_j, d_{j+1}) \quad (4.17)$$

図 4.6 に対応して、関係式 (4.15) の数式による証明が以下に与えられる。

$$\begin{aligned}
 &\sum_{c_1, d_1} M_{\delta_0, d_1}^{\gamma_0, c_1} T'_{c_1, \gamma_{N+1}} T''_{d_1, \delta_{N+1}} \\
 &= \sum_{c_1, c_2, \dots, c_N} \sum_{d_1, d_2, \dots, d_N} M_{\delta_0, d_1}^{\gamma_0, c_1} S(a_1, b_1)_{d_1, d_2}^{c_1, c_2} \cdot S(a_2, b_2)_{d_2, d_3}^{c_2, c_3} \cdots S(a_N, b_N)_{d_N, \delta_{N+1}}^{c_N, \gamma_{N+1}}
 \end{aligned}$$

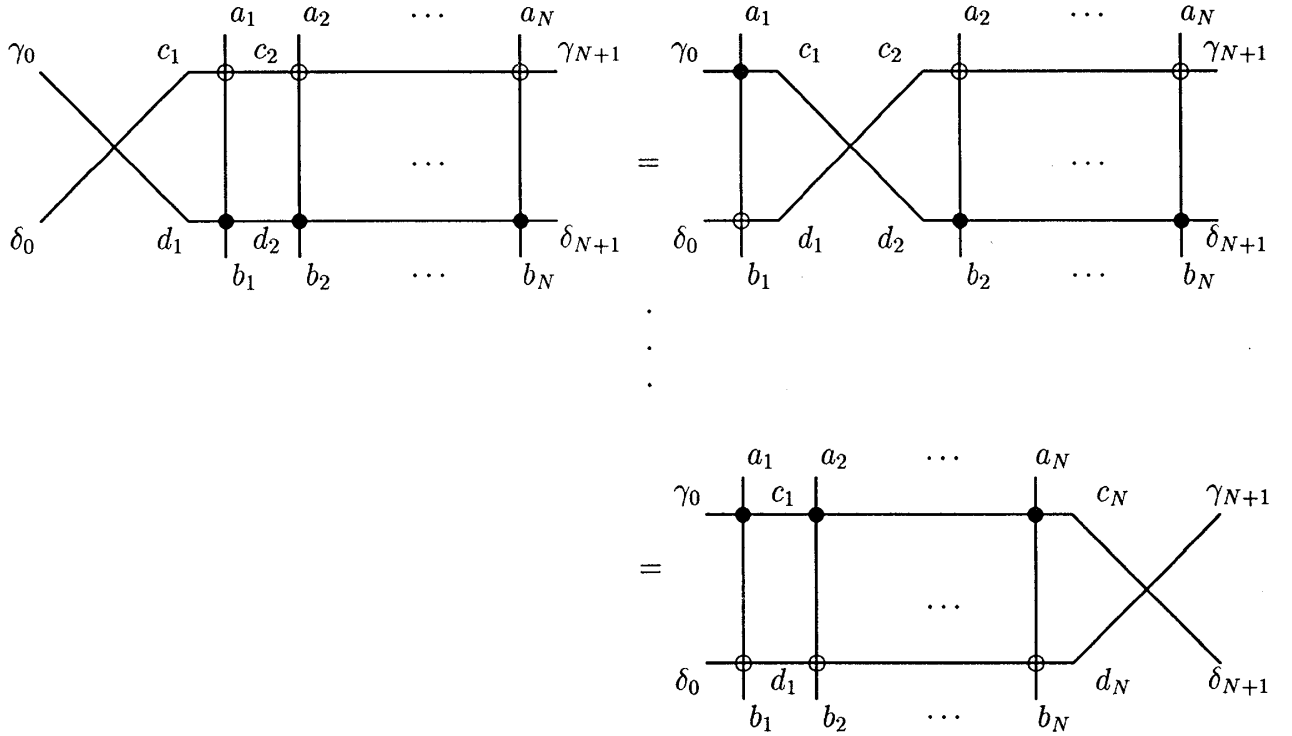


図 4.6: ヤン・バクスター関係式の証明の概略図

$$\begin{aligned}
&= \sum_{c_1, c_2, \dots, c_N} \sum_{d_1, d_2, \dots, d_N} S'(a_1, b_1)_{\delta_0, d_1}^{\gamma_0, c_1} M_{d_1, d_2}^{c_1, c_2} \cdot S(a_2, b_2)_{d_2, d_3}^{c_2, c_3} \cdots S(a_N, b_N)_{d_N, \delta_{N+1}}^{c_N, \gamma_{N+1}} \\
&= \sum_{c_1, c_2, \dots, c_N} \sum_{d_1, d_2, \dots, d_N} S'(a_1, b_1)_{\delta_0, d_1}^{\gamma_0, c_1} \cdot S'(a_2, b_2)_{d_1, d_2}^{c_1, c_2} M_{d_2, d_3}^{c_2, c_3} \cdots S(a_N, b_N)_{d_N, \delta_{N+1}}^{c_N, \gamma_{N+1}} \\
&= \sum_{c_1, c_2, \dots, c_N} \sum_{d_1, d_2, \dots, d_N} S'(a_1, b_1)_{\delta_0, d_1}^{\gamma_0, c_1} \cdot S'(a_2, b_2)_{d_1, d_2}^{c_1, c_2} \cdots S'(a_N, b_N)_{d_{N-1}, d_N}^{c_{N-1}, c_N} M_{d_N, \delta_{N+1}}^{c_N, \gamma_{N+1}} \\
&= \sum_{c_{N+1}, d_{N+1}} T''_{c_1, c_{N+1}} T'_{d_1, d_{N+1}} M_{d_N, \delta_{N+1}}^{c_N, \gamma_{N+1}} \quad (4.18)
\end{aligned}$$

次に、行列 M の逆行列 M^{-1} を考えよう。

$$(M^{-1}M)_{d_1, d_2}^{c_1, c_2} = (MM^{-1})_{d_1, d_2}^{c_1, c_2} = \delta_{c_1, c_2} \delta_{d_1, d_2} \quad (4.19)$$

関係式 (4.15) の両辺に右から逆行列 M^{-1} をかけると

$$MT'T''M^{-1} = T''T' \quad (4.20)$$

が導かれる。そして両辺のトレースをとると、 $\text{tr}(MT'T''M^{-1}) = \text{tr}(T'T'')$ であるので、求める転送行列の交換： $\tau' \tau'' = \tau'' \tau'$ が証明される。

4.4 ヤン・バクスター関係式を満たすボルツマン重率の解

ヤン・バクスター関係式を満たすボルツマン重率を具体的に求めてみよう。 (a_1, a_2, a_3) と (b_1, b_2, b_3) の可能な全ての場合の数は $2^6 = 64$ 通りである。しかし、アイス・ルールのため

に $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ となる場合のみを考えれば良い。この場合の数は、以下の計算から 20 通りである。

$$({}_3C_0)^2 + ({}_3C_1)^2 + ({}_3C_2)^2 + ({}_3C_3)^2 = 1 + 9 + 9 + 1 = 20 \quad (4.21)$$

さらにボルツマン重率の対称性 (4.7) を考えよう。1 と 2 を全部入れ替えてもボルツマン重率は変わらない。そこで半分の 10 通りだけを考えれば良い。

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

さらに (4.7) には次のような対称性がある。

$$w(\alpha, \beta | \gamma, \delta) = w(\gamma, \delta | \alpha, \beta) = w(\beta, \alpha | \delta, \gamma) \quad (4.23)$$

これらの対称性を組み合わせると、次の二つの場合に対するヤン・バクスター関係式は等価である。

$$(1) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \quad (2) = \begin{pmatrix} b_3 & b_2 & b_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

より詳しく述べると、(1) に対するヤン・バクスター関係式 (4.8) の左辺 (右辺) が (2) に対する右辺 (左辺) と等しい。そこで (4.24) の二つが一致してしまう場合は、自明な関係式を与える。さらに残りの 6 個は 2 個ずつ同じ関係式になるので、結局独立な場合は以下の 3 通りである。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

ボルツマン重率を用いて以上三つの場合のヤン・バクスター関係式を書き下すと、以下のようになる。

$$\begin{aligned} ac'a'' &= bc'b'' + ca'c'' \\ ab'c'' &= ba'c'' + cc'b'' \\ cb'a'' &= ca'b'' + bc'c'' \end{aligned} \quad (4.26)$$

上を満たす非自明な (a'', b'', c'') が存在する条件は、次の行列式が零となることである。

$$\begin{vmatrix} ac' & -bc' & -ca' \\ 0 & cc' & ba' - ab' \\ cb' & -ca' & -bc' \end{vmatrix} = abca'b'c' \left(\frac{(a')^2 + (b')^2 - (c')^2}{a'b'} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} \right) \quad (4.27)$$

こうして次の関係式が成立するとき、ヤン・バクスター関係式を満たすボルツマン重率が存在する。

$$\frac{(a')^2 + (b')^2 - (c')^2}{a'b'} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} \quad (4.28)$$

変数 Δ を次のように定める。

$$\Delta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (4.29)$$

これは XXZ 模型の異方性変数と一致する。

6 バーテックス模型の場合、3 個のボルツマン重率はスペクトルパラメーターとよばれる変数 u を用いて $w(\alpha, \beta | \gamma, \delta; u)$ とまとめて表現できる。 u と v を任意の変数として、 $w(\alpha, \beta | \gamma, \delta)$ 、 $w'(\alpha, \beta | \gamma, \delta)$ そして $w''(\alpha, \beta | \gamma, \delta)$ は各々、 $w(\alpha, \beta | \gamma, \delta; u)$ 、 $w(\alpha, \beta | \gamma, \delta; u+v)$ そして $w(\alpha, \beta | \gamma, \delta; v)$ に対応する。こうしてヤン・バクスター関係式は、スペクトルパラメーターを用いて以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha, \beta, \gamma} w(a_1, \alpha | a_2, \gamma; u) w(\gamma, \beta | a_3, b_3; u+v) w(\alpha, b_1 | \beta, b_2; v) \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} w(a_2, \beta | a_3, \alpha; v) w(a_1, b_1 | \beta, \gamma; u+v) w(\gamma, b_2 | \alpha, b_3; u) \end{aligned} \quad (4.30)$$

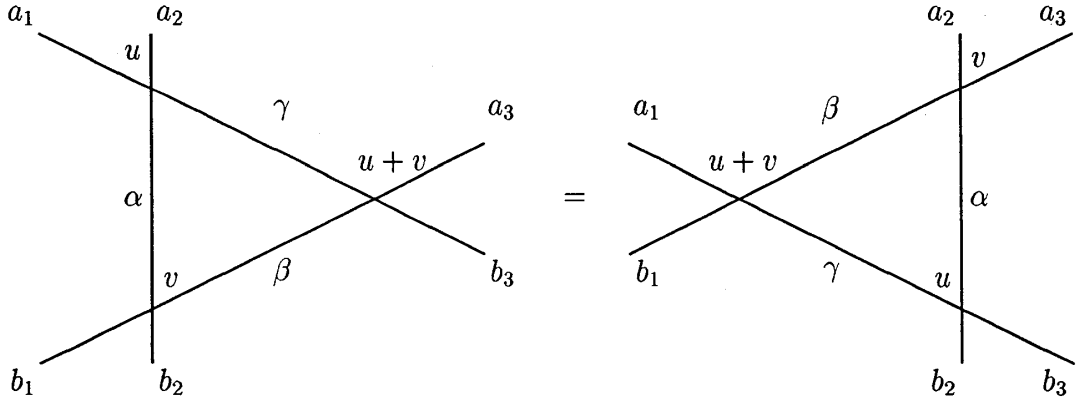


図 4.7: ヤン・バクスター関係式：スペクトルパラメーターは交差する直線の角度に対応する
例えば、次のようにおくと良い。

$$\begin{aligned} a &= \rho \sinh(u + 2\eta) \\ b &= \rho \sinh(u) \\ c &= \rho \sinh(2\eta) \end{aligned} \quad (4.31)$$

ここで $\Delta = \cosh(2\eta)$ となる。

スペクトルパラメーターで表示すると、転送行列の交換は次のように表される。

$$\tau(u)\tau(v) = \tau(v)\tau(u) \quad (4.32)$$

5 代数的 Bethe 仮設法（量子逆散乱法）

5.1 R 行列と L 演算子

代数的ベーテ仮設法の出発点は、ヤン・バクスター方程式を生成消滅演算子の間の交換関係と読みかえることである。[6, 7, 8] ヤン・バクスター方程式の右辺あるいは左辺に登場する三つのボルツマン重率の積を、R 行列の要素と二つの L 演算子の要素の積である、とみなす。

最初に、行列の直積（テンソル積）の記号法を定義する。行列 A の j 行 k 列成分の行列要素を A_k^j と表す。二つの行列 A と B の直積 $A \otimes B$ を定義する。 (j_1, j_2) 行 (k_1, k_2) 列の成分を

$$(A \otimes B)_{k_1, k_2}^{j_1, j_2} = A_{k_1}^{j_1} B_{k_2}^{j_2} \quad (5.1)$$

と定めよう。具体的に行列で表示すると、次式のようになる。

$$\begin{aligned} (A \otimes B) &= \begin{pmatrix} (A \otimes B)_{11}^{11} & (A \otimes B)_{12}^{11} & (A \otimes B)_{21}^{11} & (A \otimes B)_{22}^{11} \\ (A \otimes B)_{11}^{12} & (A \otimes B)_{12}^{12} & (A \otimes B)_{21}^{12} & (A \otimes B)_{22}^{12} \\ (A \otimes B)_{11}^{21} & (A \otimes B)_{12}^{21} & (A \otimes B)_{21}^{21} & (A \otimes B)_{22}^{21} \\ (A \otimes B)_{11}^{22} & (A \otimes B)_{12}^{22} & (A \otimes B)_{21}^{22} & (A \otimes B)_{22}^{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1^1 B_1^1 & A_1^1 B_2^1 & A_2^1 B_1^1 & A_2^1 B_2^1 \\ A_1^1 B_1^2 & A_1^1 B_2^2 & A_2^1 B_1^2 & A_2^1 B_2^2 \\ A_1^2 B_1^1 & A_1^2 B_2^1 & A_2^2 B_1^1 & A_2^2 B_2^1 \\ A_1^2 B_1^2 & A_1^2 B_2^2 & A_2^2 B_1^2 & A_2^2 B_2^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.2)$$

1 次元 XXX 模型に対応する R 行列を定義しよう。R 行列の要素 R_{cd}^{ab} を次式のように定める。

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} R(\lambda)_{11}^{11} & R(\lambda)_{12}^{11} & R(\lambda)_{21}^{11} & R(\lambda)_{22}^{11} \\ R(\lambda)_{11}^{12} & R(\lambda)_{12}^{12} & R(\lambda)_{21}^{12} & R(\lambda)_{22}^{12} \\ R(\lambda)_{11}^{21} & R(\lambda)_{12}^{21} & R(\lambda)_{21}^{21} & R(\lambda)_{22}^{21} \\ R(\lambda)_{11}^{22} & R(\lambda)_{12}^{22} & R(\lambda)_{21}^{22} & R(\lambda)_{22}^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda) & c(\lambda) & 0 \\ 0 & c(\lambda) & b(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

ここで $b(\lambda)$ と $c(\lambda)$ は次式のように与えられる。

$$b(\lambda) = \frac{2\eta}{\lambda + 2\eta}, \quad c(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda + 2\eta}. \quad (5.4)$$

6 バーテックス模型のボルツマン重率において $u \rightarrow \lambda\epsilon$ および $2\eta \rightarrow 2\eta\epsilon$ と置き換え、さらに ϵ を非常に小さくする極限をとると、この R 行列が導かれる。

L 演算子は格子点 n の上に定義されたスピン変数を行列要素とする「行列」で、具体的には次式で与えられる。

$$L_n(\lambda) = \lambda I_0 \otimes I_n + \eta \sum_{a=x,y,z} \sigma_0^a \otimes \sigma_n^a \quad (5.5)$$

ここで I_0 および σ_0^a は 補助空間 V_0 に作用する演算子であり、補助空間の添字は L 行列の行列要素に対応する。L 演算子の行列要素 $(L_n(\lambda))_{jk}$ は次のように表される。

$$(L_n(\lambda))_{jk} = \lambda(I_0)_{jk} \otimes I_n + \eta \sum_{a=x,y,z} (\sigma_0^a)_{jk} \otimes \sigma_n^a \quad (5.6)$$

以下のように行列で表すと、分かりやすいであろう。

$$\begin{aligned} L_n(\lambda) &= \lambda \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 & \sigma_n^x \\ \sigma_n^x & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \eta \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_n^y \\ i\sigma_n^y & 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} \sigma_n^z & 0 \\ 0 & -\sigma_n^z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda I_n + \eta \sigma_n^z & \eta \sigma_n^- \\ \eta \sigma_n^+ & \lambda I_n - \eta \sigma_n^z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.7)$$

L 演算子の行列要素 $(L_n(\lambda))_{jk}$ を $L_n(\lambda)_k^j$ と書くと後で便利である。

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} L_n(u)_1^1 & L_n(u)_2^1 \\ L_n(u)_1^2 & L_n(u)_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n + \eta \sigma_n^z & \eta \sigma_n^- \\ \eta \sigma_n^+ & \lambda I_n - \eta \sigma_n^z \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

この R 行列と L 演算子を用いて、ヤン・バクスター方程式は次のように表される。

$$R(\lambda - \mu) (L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)) = (L_n(\mu) \otimes L_n(\lambda)) R(\lambda - \mu) \quad (5.9)$$

ここで $L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)$ におけるテンソル積は、補助空間に関するテンソル積である。つまり、これを行列で表すと次式のようにになる。

$$\begin{aligned} L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu) &= \begin{pmatrix} L_n(\lambda)_1^1 & L_n(\lambda)_2^1 \\ L_n(\lambda)_1^2 & L_n(\lambda)_2^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} L_n(\mu)_1^1 & L_n(\mu)_2^1 \\ L_n(\mu)_1^2 & L_n(\mu)_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_n(\lambda)_1^1 L_n(\mu)_1^1 & L_n(\lambda)_1^1 L_n(\mu)_2^1 & L_n(\lambda)_2^1 L_n(\mu)_1^1 & L_n(\lambda)_2^1 L_n(\mu)_2^1 \\ L_n(\lambda)_1^1 L_n(\mu)_1^2 & L_n(\lambda)_1^1 L_n(\mu)_2^2 & L_n(\lambda)_2^1 L_n(\mu)_1^2 & L_n(\lambda)_2^1 L_n(\mu)_2^2 \\ L_n(\lambda)_1^2 L_n(\mu)_1^1 & L_n(\lambda)_1^2 L_n(\mu)_2^1 & L_n(\lambda)_2^2 L_n(\mu)_1^1 & L_n(\lambda)_2^2 L_n(\mu)_2^1 \\ L_n(\lambda)_1^2 L_n(\mu)_1^2 & L_n(\lambda)_1^2 L_n(\mu)_2^2 & L_n(\lambda)_2^2 L_n(\mu)_1^2 & L_n(\lambda)_2^2 L_n(\mu)_2^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

ここで上の行列の行列要素は、行列の積であることに注意する。例えば 4 行 4 列の行列 $L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)$ の 1 行 2 列成分は、次式のようにになる。

$$L_n(\lambda)_1^1 L_n(\mu)_2^1 = (\lambda I_n + \eta \sigma_n^z) \eta \sigma_n^- \quad (5.11)$$

そこで、 $R(\lambda - \mu) (L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)) = (L_n(\mu) \otimes L_n(\lambda)) R(\lambda - \mu)$ は次のような 4 行 4 列の行列の二つの積に対する関係式を意味する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 1 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_n(\lambda)_1^1 L_n(\mu)_1^1 & L_n(\lambda)_1^1 L_n(\mu)_2^1 & L_n(\lambda)_2^1 L_n(\mu)_1^1 & L_n(\lambda)_2^1 L_n(\mu)_2^1 \\ L_n(\lambda)_1^1 L_n(\mu)_1^2 & L_n(\lambda)_1^1 L_n(\mu)_2^2 & L_n(\lambda)_2^1 L_n(\mu)_1^2 & L_n(\lambda)_2^1 L_n(\mu)_2^2 \\ L_n(\lambda)_1^2 L_n(\mu)_1^1 & L_n(\lambda)_1^2 L_n(\mu)_2^1 & L_n(\lambda)_2^2 L_n(\mu)_1^1 & L_n(\lambda)_2^2 L_n(\mu)_2^1 \\ L_n(\lambda)_1^2 L_n(\mu)_1^2 & L_n(\lambda)_1^2 L_n(\mu)_2^2 & L_n(\lambda)_2^2 L_n(\mu)_1^2 & L_n(\lambda)_2^2 L_n(\mu)_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} L_n(\mu)_1^1 L_n(\lambda)_1^1 & L_n(\mu)_1^1 L_n(\lambda)_2^1 & L_n(\mu)_2^1 L_n(\lambda)_1^1 & L_n(\mu)_2^1 L_n(\lambda)_2^1 \\ L_n(\mu)_1^1 L_n(\lambda)_1^2 & L_n(\mu)_1^1 L_n(\lambda)_2^2 & L_n(\mu)_2^1 L_n(\lambda)_1^2 & L_n(\mu)_2^1 L_n(\lambda)_2^2 \\ L_n(\mu)_1^2 L_n(\lambda)_1^1 & L_n(\mu)_1^2 L_n(\lambda)_2^1 & L_n(\mu)_2^2 L_n(\lambda)_1^1 & L_n(\mu)_2^2 L_n(\lambda)_2^1 \\ L_n(\mu)_1^2 L_n(\lambda)_1^2 & L_n(\mu)_1^2 L_n(\lambda)_2^2 & L_n(\mu)_2^2 L_n(\lambda)_1^2 & L_n(\mu)_2^2 L_n(\lambda)_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 1 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

ここで $b = b(\lambda - \mu)$ そして $c = c(\lambda - \mu)$ とする。

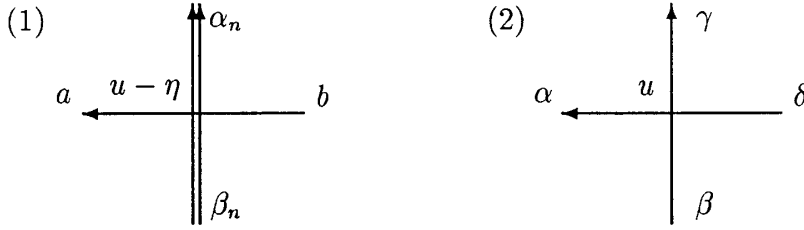


図 5.1: (1) $L_n(\lambda)_b^a |_{\alpha_n, \beta_n}$ 、(2) $w(a, \beta_n | \alpha_n, b; \lambda - \eta)$

R 行列と L 演算子で表されたヤン・バクスター方程式 (5.9) は、4 行 4 列の行列の二つの積の間の関係式である。その行列要素を具体的に書き下してみると、ヤン・バクスター方程式の図による表示と対応することが分かる。まず、ヤン・バクスター方程式 (5.9) の左辺は次のようなものである。

$$\begin{aligned} [R(\lambda - \mu) \cdot L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)]_{b_1, b_2}^{a_1, a_2} &= \sum_{c_1, c_2} R(\lambda - \mu)_{c_1, c_2}^{a_1, a_2} (L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu))_{b_1, b_2}^{c_1, c_2} \\ &= \sum_{c_1, c_2} R(\lambda - \mu)_{c_1, c_2}^{a_1, a_2} L_n(\lambda)_{b_1}^{c_1} \times L_n(\mu)_{b_2}^{c_2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

ヤン・バクスター方程式 (5.9) の右辺は次式のように表される。

$$\begin{aligned} [L(\mu) \otimes L_n(\lambda) \cdot R(\lambda - \mu)]_{b_1, b_2}^{a_1, a_2} &= \sum_{c_1, c_2} (L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu))_{c_1, c_2}^{a_1, a_2} R(\lambda - \mu)_{b_1, b_2}^{c_1, c_2} \\ &= \sum_{c_1, c_2} L_n(\mu)_{c_1}^{a_1} \times L_n(\lambda)_{c_2}^{a_2} R(\lambda - \mu)_{b_1, b_2}^{c_1, c_2} \end{aligned} \quad (5.14)$$

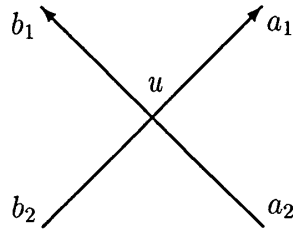


図 5.2: $R(\lambda)_{b_1, b_2}^{a_1, a_2}$

R行列やL演算子の要素はボルツマン重率との対応する。その関係を式や図で表してみよう。R行列とボルツマン重率は次のような関係にある。

$$R(\lambda)_{b_1, b_2}^{a_1, a_2} = w(a_2, b_2 | a_1, b_1; \lambda) = X(\lambda)_{b_2, b_1}^{a_2, a_1} \quad (5.15)$$

ここで $X(\lambda)_{b_2, b_1}^{a_2, a_1}$ は第8節で用いられる表示である。次に、 $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ などは n 番目の格子点の上のスピン変数の添字を表すとする。L演算子の行列要素 $L_n(\lambda)_b^a$ は、 n 番目の格子点の上のスピン変数で表されるので、このスピン変数を行列表示したときの α_n 行 β_n 列成分を、 $L_n(\lambda)_b^a |_{\alpha_n, \beta_n}$ とすると、まず次式のように与えられる。

$$L_n(\lambda)_k^j |_{\alpha_n, \beta_n} = \lambda (I_0)_{jk} \otimes (I_n)_{\alpha_n, \beta_n} + \eta \sum_{a=x, y, z} (\sigma_0^a)_{jk} \otimes (\sigma_n^a)_{\alpha_n, \beta_n} \quad (5.16)$$

ボルツマン重率との関係は、

$$L_n(\lambda)_b^a |_{\alpha_n, \beta_n} = w(a, \beta_n | \alpha_n, b; \lambda - \eta) = X(\lambda - \eta)_{\beta_n, b}^{a, \alpha_n} \quad (5.17)$$

以上より、ヤン・バクスター方程式は

$$\begin{aligned} [R(\lambda - \mu) \cdot L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)]_{b_1, b_2}^{a_1, a_2} |_{\alpha_n, \beta_n} &= \sum_{c_1, c_2} R(\lambda - \mu)_{c_1, c_2}^{a_1, a_2} (L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu))_{b_1, b_2}^{c_1, c_2} |_{\alpha_n, \beta_n} \\ &= \sum_{c_1, c_2} \sum_{\gamma_n} R(\lambda - \mu)_{c_1, c_2}^{a_1, a_2} L_n(\lambda)_{b_1}^{c_1} |_{\alpha_n, \gamma_n} L_n(\mu)_{b_2}^{c_2} |_{\gamma_n, \beta_n} \end{aligned} \quad (5.18)$$

ヤン・バクスター方程式 (5.9) の右辺は次式のように書き下される。

$$\begin{aligned} [L(\mu) \otimes L_n(\lambda) \cdot R(\lambda - \mu)]_{b_1, b_2}^{a_1, a_2} |_{\alpha_n, \beta_n} &= \sum_{c_1, c_2} (L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu))_{c_1, c_2}^{a_1, a_2} |_{\alpha_n, \beta_n} R(\lambda - \mu)_{b_1, b_2}^{c_1, c_2} \\ &= \sum_{c_1, c_2} \sum_{\gamma_n} L_n(\mu)_{c_1}^{a_1} |_{\alpha_n, \gamma_n} L_n(\lambda)_{c_2}^{a_2} |_{\gamma_n, \beta_n} R(\lambda - \mu)_{b_1, b_2}^{c_1, c_2} \end{aligned} \quad (5.19)$$

この式はボルツマン重率で表されたヤン・バクスター関係式と等価である。

5.2 モノドロミー行列と転送行列

4章で導入された転送行列と同じものが、L演算子の積から導かれる。まず、モノドロミー行列 $T(\lambda)$ を次式で定義する。

$$T(\lambda) = L_1(\lambda) \cdots L_N(\lambda) \quad (5.20)$$

ここで右辺の積は、L演算子 $L_n(\lambda)$ を n 番目の格子点上に作用するスピン演算子を要素とする2行2列の行列と見なして計算される。例えば、 $L_n(\lambda)$ と $L_{n+1}(\lambda)$ の積は、つぎのよ

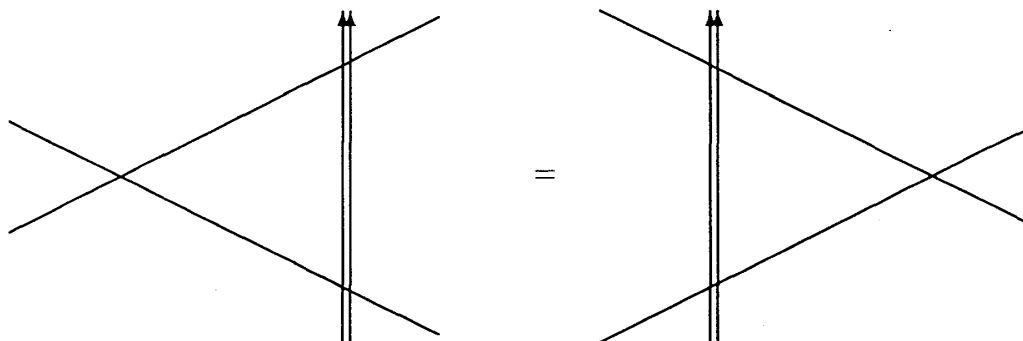


図 5.3: L 行列に対するヤン・バクスター方程式

うなものである。

$$\begin{aligned}
 & L_n(\lambda)L_{n+1}(\lambda) \\
 &= \begin{pmatrix} L_n(\lambda)_1^1 & L_n(\lambda)_2^1 \\ L_n(\lambda)_1^2 & L_n(\lambda)_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{n+1}(\lambda)_1^1 & L_{n+1}(\lambda)_2^1 \\ L_{n+1}(\lambda)_1^2 & L_{n+1}(\lambda)_2^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} L_n(\lambda)_1^1 L_{n+1}(\lambda)_1^1 + L_n(\lambda)_2^1 L_{n+1}(\lambda)_1^2 & L_n(\lambda)_1^1 L_{n+1}(\lambda)_2^1 + L_n(\lambda)_2^1 L_{n+1}(\lambda)_2^2 \\ L_n(\lambda)_1^2 L_{n+1}(\lambda)_1^1 + L_n(\lambda)_2^2 L_{n+1}(\lambda)_1^2 & L_n(\lambda)_1^2 L_{n+1}(\lambda)_2^1 + L_n(\lambda)_2^2 L_{n+1}(\lambda)_2^2 \end{pmatrix} \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

こうして、モノドロミー行列はスピン変数を行列要素にもつ 2 行 2 列の行列である。その要素を次のように表す。

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

そして、転送行列はモノドロミー行列のトレースで与えられる。

$$\tau(\lambda) = \text{tr} T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda). \quad (5.23)$$

このように定義された $\tau(\lambda)$ は、第 4 節で導入した転送行列と一致している。演算子 $\tau(\lambda)$ を 2^N 行 2^N 列の行列とみなすと、その行列要素は第 4 節でボルツマン重率の積に関する和で表された転送行列の要素を与えるのである。

転送行列を演算子の形式に表した目的は、次節で見るように、その要素を生成消滅演算子とみなすことである。面白いことに、 $B(\lambda)$ がベーテ仮設状態の生成演算子、 $C(\lambda)$ が消滅演算子、そして $A(\lambda) + D(\lambda)$ 転送行列となっているのである。

モノドロミー行列のトレースとしての転送行列の固有値を少し調べてみよう。最初に「真空」を選択する。全てのスピンが上向き状態を「真空状態」として採用する。

$$|0\rangle = \overbrace{|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 \cdots |\uparrow\rangle_N}^N \quad (5.24)$$

モノドロミー行列の真空への作用を調べてみると、以下のようになる。

$$T(\lambda)|0\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} A(\lambda)|0\rangle & B(\lambda)|0\rangle \\ C(\lambda)|0\rangle & D(\lambda)|0\rangle \end{pmatrix} \\
&= (L_1(\lambda) \cdots L_N(\lambda)) \overbrace{|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 \cdots |\uparrow\rangle_N}^{N \text{ times}} \\
&= L_1(\lambda) |\uparrow\rangle_1 \cdots L_N(\lambda) |\uparrow\rangle_N \\
&= \begin{pmatrix} (\lambda I_1 + \eta \sigma_1^z) |\uparrow\rangle_1 & \eta \sigma_1^- |\uparrow\rangle_1 \\ \eta \sigma_1^+ |\uparrow\rangle_1 & (\lambda I_1 - \eta \sigma_1^z) |\uparrow\rangle_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} (\lambda I_N + \eta \sigma_N^z) |\uparrow\rangle_N & \eta \sigma_N^- |\uparrow\rangle_N \\ \eta \sigma_N^+ |\uparrow\rangle_N & (\lambda I_N - \eta \sigma_N^z) |\uparrow\rangle_N \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\lambda + \eta) |\uparrow\rangle_1 & \eta |\downarrow\rangle_1 \\ 0 & (\lambda - \eta) |\uparrow\rangle_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} (\lambda + \eta) |\uparrow\rangle_N & \eta |\downarrow\rangle_N \\ 0 & (\lambda - \eta) |\uparrow\rangle_N \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\lambda + \eta)^N |0\rangle & * \\ 0 & (\lambda - \eta)^N |0\rangle \end{pmatrix} \tag{5.25}
\end{aligned}$$

以上の計算から、以下のようにまとめられる。

$$\begin{aligned}
A(\lambda)|0\rangle &= (\lambda + \eta)^N |0\rangle \\
D(\lambda)|0\rangle &= (\lambda - \eta)^N |0\rangle \\
C(\lambda)|0\rangle &= 0
\end{aligned} \tag{5.26}$$

記号の便利のため、 $\alpha(\lambda)$ と $\delta(\lambda)$ を以下のように定める。

$$\alpha(\lambda) = (\lambda + \eta)^N, \quad \delta(\lambda) = (\lambda - \eta)^N \tag{5.27}$$

こうして、転送行列の真空に対する固有値が求められた。

$$\tau(\lambda)|0\rangle = (A(\lambda) + D(\lambda))|0\rangle = (\alpha(\lambda) + \delta(\lambda))|0\rangle \tag{5.28}$$

5.3 演算子の交換関係

R 行列と L 演算子で表されたヤン・バクスター方程式 (5.9) を繰り返し用いて、モノドロミー行列に対するヤン・バクスター方程式を導くことができる。例えば、 $n = 1$ と $n = 2$ の L 行列の積に対しては、以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
R(\lambda - \mu) (L_1(\lambda) L_2(\lambda) \otimes L_1(\mu) L_2(\mu)) &= R(\lambda - \mu) (L_1(\lambda) \otimes L_1(\mu)) (L_2(\lambda) \otimes L_2(\mu)) \\
&= (L_1(\mu) \otimes L_1(\lambda)) R(\lambda - \mu) (L_2(\lambda) \otimes L_2(\mu)) \\
&= (L_1(\mu) \otimes L_1(\lambda)) (L_2(\mu) \otimes L_2(\lambda)) R(\lambda - \mu) \\
&= (L_1(\mu) L_2(\mu) \otimes L_1(\lambda) L_2(\lambda)) R(\lambda - \mu) \tag{5.29}
\end{aligned}$$

上のトリックを繰り返すと次式が導かれる。

$$R(\lambda - \mu) (T(\lambda) \otimes T(\mu)) = (T(\mu) \otimes T(\lambda)) R(\lambda - \mu) \tag{5.30}$$

この関係式が代数的ベーテ仮設法の出発点となる。

モノドロミー行列のテンソル積に関するヤン・バクスター方程式の左辺を行列要素を用いて直接書き下してみる。引数を省略して、 $b = b(\lambda - \mu)$ 、 $c = c(\lambda - \mu)$ 、そして $A = A(\lambda)$ および $A' = A(\mu)$ などのように表す。

$$\begin{aligned}
 & R(\lambda - \mu) \cdot T(\lambda) \otimes T(\mu) \\
 &= R(\lambda - \mu) \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A(\mu) & B(\mu) \\ C(\mu) & D(\mu) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AA' & AB' & BA' & BB' \\ AC' & AD' & BC' & BD' \\ CA' & CB' & DA' & DB' \\ CC' & CD' & DC' & DD' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} AA' & AB' & BA' & BB' \\ bAC' + cCA' & bAD' + cCB' & bBC' + cDA' & bBD' + cDB' \\ cAC' + bCA' & cAD' + bCB' & cBC' + bDA' & cBD' + bDB' \\ CC' & CD' & DC' & DD' \end{pmatrix} \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

同様にして、右辺は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 T(\mu) \otimes T(\lambda) \cdot R(\lambda - \mu) &= \begin{pmatrix} A'A & A'B & B'A & B'B \\ A'C & A'D & B'C & B'D \\ C'A & C'B & D'A & D'B \\ C'C & C'D & D'C & D'D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A'A & bA'B + cB'A & cA'B + bB'A & B'B \\ A'C & bA'D + cB'C & cA'D + bB'C & B'D \\ C'A & bC'B + cD'A & cC'B + bD'A & D'B \\ C'C & bC'D + cD'C & cC'D + bD'C & D'D \end{pmatrix} \quad (5.32)
 \end{aligned}$$

左辺 (5.31) と右辺 (5.32) の行列要素から全部で 16 個の交換関係が導かれる。例えば、1 行 4 列成分を比べると、 $BB' = B'B$ が導かれる。つまり、生成演算子である B 演算子は互いに交換することを意味する。

$$B(\lambda)B(\mu) = B(\mu)B(\lambda) \quad (5.33)$$

次に、1 行 3 列成分を比較すると、 $BA' = cA'B + bB'A$ が出てくる。生成演算子 B と転送行列の一部である A との交換関係が導かれる。

$$A(\lambda)B(\mu) = \frac{1}{c(\mu - \lambda)} B(\mu)A(\lambda) - \frac{b(\mu - \lambda)}{c(\mu - \lambda)} B(\lambda)A(\mu) \quad (5.34)$$

同様にして 2 行 3 列成分から $B'D = bBD' + cD'B$ 、つまり生成演算子 B と転送行列の一部である D 演算子の交換関係が導かれる。

$$D(\lambda)B(\mu) = \frac{1}{c(\lambda - \mu)} B(\mu)D(\lambda) - \frac{b(\lambda - \mu)}{c(\lambda - \mu)} B(\lambda)D(\mu) \quad (5.35)$$

これらの交換関係を用いて、代数的にベーテ仮設固有状態が構成される。

5.4 ベーテ仮説固有ベクトルの構成とベーテ仮説方程式

代数的ベーテ仮説法に従ってベーテ仮説固有ベクトルを議論しよう。 M 個の下向きスピンを持つベーテ固有ベクトルは、 M 個の生成演算子 B の積で与えられる。

$$|M\rangle = B(\lambda_1) \cdots B(\lambda_M)|0\rangle \quad (5.36)$$

ただし M 個のラピディティはベーテ仮説方程式の解であるものとする。以下、この事実を具体的に議論する。

(1) $M=1$ の場合

転送行列をベクトル $B(\lambda_1)|0\rangle$ に作用させる。

$$\begin{aligned} \tau(\lambda)|1\rangle &= (A(\lambda) + D(\lambda))B(\lambda_1)|0\rangle \\ &= A(\lambda)B(\lambda_1)|0\rangle + D(\lambda)B(\lambda_1)|0\rangle \end{aligned} \quad (5.37)$$

第一項は、交換関係と A 演算子の固有値を用いて以下のように計算される。

$$\begin{aligned} A(\lambda)B(\lambda_1)|0\rangle &= \left(\frac{1}{c(\lambda_1 - \lambda)} B(\lambda_1)A(\lambda) - \frac{b(\lambda_1 - \lambda)}{c(\lambda_1 - \lambda)} B(\lambda)A(\lambda_1) \right) |0\rangle \\ &= \frac{\alpha(\lambda)}{c(\lambda_1 - \lambda)} B(\lambda_1)|0\rangle - \frac{b(\lambda_1 - \lambda)}{c(\lambda_1 - \lambda)} \alpha(\lambda_1) B(\lambda)|0\rangle \end{aligned} \quad (5.38)$$

第二項も同様にして以下のようになる。

$$\begin{aligned} D(\lambda)B(\lambda_1)|0\rangle &= \left(\frac{1}{c(\lambda - \lambda_1)} B(\lambda_1)D(\lambda) - \frac{b(\lambda - \lambda_1)}{c(\lambda - \lambda_1)} B(\lambda)D(\lambda_1) \right) |0\rangle \\ &= \frac{\delta(\lambda)}{c(\lambda - \lambda_1)} B(\lambda_1)|0\rangle - \frac{b(\lambda - \lambda_1)}{c(\lambda - \lambda_1)} \delta(\lambda_1) B(\lambda)|0\rangle \end{aligned} \quad (5.39)$$

そこで、ラピディティ λ_1 が次の条件式を満たすとき、 $B(\lambda_1)|0\rangle$ は転送行列 $\tau(\lambda)$ の固有ベクトルになることが分かる。

$$\frac{b(\lambda_1 - \lambda)}{c(\lambda_1 - \lambda)} \alpha(\lambda_1) + \frac{b(\lambda - \lambda_1)}{c(\lambda - \lambda_1)} \delta(\lambda_1) = 0 \quad (5.40)$$

このとき、以下が成立する。

$$(A(\lambda) + D(\lambda)) B(\lambda_1)|0\rangle = \left(\frac{\alpha(\lambda)}{c(\lambda_1 - \lambda)} + \frac{\delta(\lambda)}{c(\lambda - \lambda_1)} \right) B(\lambda_1)|0\rangle \quad (5.41)$$

条件式 (5.40) は $b(\lambda)/c(\lambda) = 2\eta/\lambda$ を用いて変形すると、下向きスピンの 1 個の場合のベーテ仮説方程式に他ならないことが分かる。

$$\left(\frac{\lambda_1 + \eta}{\lambda_1 - \eta} \right)^N = 1 \quad (5.42)$$

(2) $M = 2$ の場合

下向きスピンの場合と同様に、転送行列 $\tau(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$ をベクトル $B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle$ に作用させる。交換関係 (5.34) と (5.35) を用いて演算子 $A(\lambda)$ と $D(\lambda)$ を右へ移動させ、途中で出現する余分な項がキャンセルするようにラピディティ λ_1 と λ_2 を決める。B 演算子同士は交換することに注意しよう。つまり、 $B(\lambda_1)B(\lambda_2) = B(\lambda_2)B(\lambda_1)$ である。

ひとつ重要なトリックを紹介する。 $A(\lambda)$ を $B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle$ にかけて交換関係 (5.34) を繰り返し適用した場合に最終的に得られるベクトルは、 $B(\lambda)B(\lambda_1)|0\rangle$ 、 $B(\lambda)B(\lambda_2)|0\rangle$ 、そして $B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle$ の 3 個である。交換関係 (5.34) を 2 回用いると一度に 2 個ずつ合計 4 個の項が出現するが、そのうちの二つは B 演算子の引数が同じ組み合わせである。また、この段階では引数 λ 、 λ_1 、そして λ_2 は任意の値をとれるので、上の三つのベクトルは互いに線形独立である。⁷

一度目に交換関係を適用したとき、A 演算子の引数 λ が λ_1 と入れ替わらない項と入れ替わる項が出現する。一度目に入れ替わらない場合、 $A(\lambda)$ の引数が次の $B(\lambda_2)$ との交換の際に入れ替わらない場合 $B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle$ が、入れ替わる場合 $B(\lambda)B(\lambda_1)|0\rangle$ が導かれる。一度目に入れ替わる場合、 $A(\lambda_1)$ の引数が次の $B(\lambda_2)$ との交換の際に入れ替わらない場合 $B(\lambda)B(\lambda_2)|0\rangle$ が、入れ替わる場合 $B(\lambda)B(\lambda_1)|0\rangle$ が導かれる。ここで $B(\lambda)B(\lambda_2)|0\rangle$ の項は 1 個しか出現しないのに、 $B(\lambda)B(\lambda_1)|0\rangle$ は 2 個出現する。

一方、最初に B 演算子の順番を並べ替えて $B(\lambda_2)B(\lambda_1)|0\rangle$ に A 演算子を掛けた場合、同様な議論により、 $B(\lambda)B(\lambda_1)|0\rangle$ の項は 1 個、 $B(\lambda)B(\lambda_2)|0\rangle$ は 2 個出現する。しかしもともと B 演算子同士は交換するので、この結果は一致していなければならない。つまり、2 個出現した場合にその係数を足しあわせると、それは 1 個だけ出現する場合の係数と一致していなければならない。

こうして、 $B(\lambda)B(\lambda_2)|0\rangle$ の係数は、 $B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle$ に $A(\lambda)$ をかけて一度目の交換関係で引数が入れ替わる場合を考えて求められる。また、 $B(\lambda)B(\lambda_1)|0\rangle$ の係数は、 $B(\lambda_2)B(\lambda_1)|0\rangle$ に $A(\lambda)$ をかけて一度目の交換関係で引数が入れ替わる場合を考えて求めることができる。

$$\begin{aligned} A(\lambda)B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle &= \alpha(\lambda) \frac{1}{c(\lambda_1 - \lambda)c(\lambda_2 - \lambda)} B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle \\ &+ \alpha(\lambda_1) \frac{b(\lambda_1 - \lambda)}{c(\lambda_1 - \lambda)} \frac{1}{c(\lambda_1 - \lambda_2)} B(\lambda)B(\lambda_2)|0\rangle \\ &+ \alpha(\lambda_2) \frac{b(\lambda_2 - \lambda)}{c(\lambda_2 - \lambda)} \frac{1}{c(\lambda_2 - \lambda_1)} B(\lambda)B(\lambda_1)|0\rangle \end{aligned} \quad (5.43)$$

同様にして、D 演算子をかけた場合は以下ようになる。

$$\begin{aligned} D(\lambda)B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle &= \delta(\lambda) \frac{1}{c(\lambda - \lambda_1)c(\lambda - \lambda_2)} B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle \\ &+ \delta(\lambda_1) \frac{b(\lambda - \lambda_1)}{c(\lambda - \lambda_1)} \frac{1}{c(\lambda_2 - \lambda_1)} B(\lambda)B(\lambda_2)|0\rangle \end{aligned}$$

⁷ この事実は例えば対応する波動関数の表示を用いて証明することができる。

$$+\delta(\lambda_2)\frac{b(\lambda-\lambda_2)}{c(\lambda-\lambda_2)}\frac{1}{c(\lambda_1-\lambda_2)}B(\lambda)B(\lambda_1)|0\rangle \quad (5.44)$$

展開 (5.43) と (5.44) の和において $B(\lambda)B(\lambda_1)|0\rangle$ および $B(\lambda)B(\lambda_2)|0\rangle$ の係数が各々キャンセルし合う条件

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda_1)\frac{b(\lambda_1-\lambda)}{c(\lambda_1-\lambda)}\frac{1}{c(\lambda_1-\lambda_2)}+\delta(\lambda_1)\frac{b(\lambda-\lambda_1)}{c(\lambda-\lambda_1)}\frac{1}{c(\lambda_2-\lambda_1)} &= 0 \\ \alpha(\lambda_2)\frac{b(\lambda_2-\lambda)}{c(\lambda_2-\lambda)}\frac{1}{c(\lambda_2-\lambda_1)}+\delta(\lambda_2)\frac{b(\lambda-\lambda_2)}{c(\lambda-\lambda_2)}\frac{1}{c(\lambda_1-\lambda_2)} &= 0 \end{aligned} \quad (5.45)$$

から、ベーター仮設方程式が導かれる。

(3) 一般の M の場合

$M=2$ の場合の議論をそのまま拡張できる。まず、A演算子をベクトル $B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_M)|0\rangle$ に作用させた結果は以下ようになる。

$$\begin{aligned} &A(\lambda)B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_M)|0\rangle \\ &= \alpha(\lambda)\prod_{j=1}^M\frac{1}{c(\lambda_j-\lambda)}\cdot B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_M)|0\rangle \\ &\quad -\alpha(\lambda_j)\sum_{j=1}^M\frac{b(\lambda_j-\lambda)}{c(\lambda_j-\lambda)}\prod_{k=1; k\neq j}^M\frac{1}{c(\lambda_k-\lambda_j)}B(\lambda_1)\cdots \overbrace{B(\lambda)}^j\cdots B(\lambda_M)|0\rangle \end{aligned} \quad (5.46)$$

次に、D演算子をベクトル $B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_M)|0\rangle$ に作用させた結果は以下のである。

$$\begin{aligned} &D(\lambda)B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_M)|0\rangle \\ &= \delta(\lambda)\prod_{j=1}^M\frac{1}{c(\lambda-\lambda_j)}\cdot B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_M)|0\rangle \\ &\quad -\sum_{j=1}^M\delta(\lambda_j)\frac{b(\lambda-\lambda_j)}{c(\lambda-\lambda_j)}\prod_{k=1; k\neq j}^M\frac{1}{c(\lambda_j-\lambda_k)}B(\lambda_1)\cdots \overbrace{B(\lambda)}^j\cdots B(\lambda_M)|0\rangle \end{aligned} \quad (5.47)$$

ここで M 個の余分な項がキャンセルする条件は、次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda_j)\frac{b(\lambda_j-\lambda)}{c(\lambda_j-\lambda)}\prod_{k=1; k\neq j}^M\frac{1}{c(\lambda_k-\lambda_j)}+\delta(\lambda_j)\frac{b(\lambda-\lambda_j)}{c(\lambda-\lambda_j)}\prod_{k=1; k\neq j}^M\frac{1}{c(\lambda_j-\lambda_k)} &= 0, \\ &\text{for } j=1, \dots, M. \end{aligned} \quad (5.48)$$

書き直すと、これはベーター仮設方程式に他ならない。

$$\left(\frac{\lambda_j+\eta}{\lambda_j-\eta}\right)=(-1)^{M-1}\prod_{k\neq j}\frac{\lambda_j-\lambda_k+2\eta}{\lambda_j-\lambda_k-2\eta}, \quad \text{for } j=1, \dots, M. \quad (5.49)$$

こうして、 M 個のラビディティーがベーター仮設方程式を満たすとき、ベクトル $B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_M)|0\rangle$ は転送行列の固有ベクトルとなることが示された。

$$\tau(\lambda)B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_M)|0\rangle=\Lambda(\lambda;\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_M)B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_M)|0\rangle \quad (5.50)$$

その固有値は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\Lambda(\lambda; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M) &= \alpha(\lambda) \prod_{j=1}^M \frac{1}{c(\lambda_j - \lambda)} + \delta(\lambda) \prod_{j=1}^M \frac{1}{c(\lambda - \lambda_j)} \\ &= (\lambda + \eta)^N \prod_{j=1}^M \frac{\lambda - \lambda_j - 2\eta}{\lambda - \lambda_j} + (\lambda - \eta)^N \prod_{j=1}^M \frac{\lambda - \lambda_j + 2\eta}{\lambda - \lambda_j}.\end{aligned}\quad (5.51)$$

5.5 可解ハミルトニアン of 転送行列からの導出

前節までで、代数的ベーテ仮設法により転送行列がどのように対角化されるかが示された。本節では、転送行列 $\tau(\lambda)$ と XXX ハミルトニアン \mathcal{H}_{XXX} の関係を議論する。

まず最初に、L 演算子は特別な場合に置換演算子と一致することに注意する。

$$\begin{aligned}L_n(\lambda = \eta) &= \eta \left(I_0 \otimes I_n + \sum_{a=x,y,z} \sigma_0^a \otimes \sigma_n^a \right) \\ &= 2\eta \Pi^{(0,n)}\end{aligned}\quad (5.52)$$

ここで記号 $\Pi^{(0,n)}$ は、 n 番目の格子点上のスピン $|\uparrow, \downarrow\rangle_n$ と補助空間 (0 番目格子点) のスピン $|\uparrow, \downarrow\rangle_0$ とに作用する置換演算子を表し、その作用は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\Pi^{(0,n)} |\uparrow\rangle_0 |\downarrow\rangle_n &= |\downarrow\rangle_0 |\uparrow\rangle_n, \quad \Pi^{(0,n)} |\downarrow\rangle_0 |\uparrow\rangle_n = |\uparrow\rangle_0 |\downarrow\rangle_n, \\ \Pi^{(0,n)} |\uparrow\rangle_0 |\uparrow\rangle_n &= |\uparrow\rangle_0 |\uparrow\rangle_n, \quad \Pi^{(0,n)} |\downarrow\rangle_0 |\downarrow\rangle_n = |\downarrow\rangle_0 |\downarrow\rangle_n.\end{aligned}\quad (5.53)$$

このことを用いて、 $\lambda = \eta$ のときに転送行列は格子並進演算子 (運動量演算子) と一致することが示される。

$$\begin{aligned}\tau(\lambda = \eta) &= \text{tr} (L_1(\eta) \cdots L_N(\eta)) \\ &= (2\eta)^N \text{tr} (\Pi^{(0,1)} \cdots \Pi^{(0,N)}) \\ &= (2\eta)^N \Pi^{(N \cdots 21)}\end{aligned}\quad (5.54)$$

ここで $\Pi^{(N \cdots 21)}$ は N を $N-1$ に、 $N-1$ を $N-2$ に、 \dots 、 2 を 1 に、そして 1 を N に変換する巡回置換であり、次式を仮定した。

$$\text{tr} (\Pi^{(0,1)} \cdots \Pi^{(0,M)}) = \Pi^{(N \cdots 21)} \quad (5.55)$$

上式は以下のように直接証明できる。

$$\begin{aligned}&\text{tr} (\Pi^{(0,1)} \cdots \Pi^{(0,M)}) |\sigma_1\rangle_1 |\sigma_2\rangle_2 \cdots |\sigma_N\rangle_N \\ &= \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}=1,2} \left(\langle \alpha_0 | \Pi^{(0,1)} | \alpha_1 \rangle \langle \alpha_1 | \cdots \langle \alpha_{N-1} | \Pi^{(0,N)} | \alpha_0 \rangle \right) |\sigma_1\rangle_1 |\sigma_2\rangle_2 \cdots |\sigma_N\rangle_N \\ &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_N=1,2} \langle \alpha_0 | \Pi^{(0,1)} | \alpha_1 \rangle |\sigma_1\rangle_1 \cdot \langle \alpha_1 | \Pi^{(0,2)} | \alpha_2 \rangle |\sigma_2\rangle_2 \cdots \langle \alpha_{N-1} | \Pi^{(0,N)} | \alpha_0 \rangle |\sigma_N\rangle_N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}=1,2} \langle \alpha_0 | \sigma_1 \rangle | \alpha_1 \rangle_1 \cdot \langle \alpha_1 | \sigma_2 \rangle | \alpha_2 \rangle_2 \cdots \langle \alpha_{N-1} | \sigma_N \rangle | \alpha_0 \rangle_N \\
&= \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}=1,2} \delta_{\alpha_0, \sigma_1} | \alpha_1 \rangle_1 \cdot \delta_{\alpha_1, \sigma_2} | \alpha_2 \rangle_2 \cdots \delta_{\alpha_{N-1}, \sigma_N} | \alpha_0 \rangle_N \\
&= | \sigma_2 \rangle_1 \cdot | \sigma_3 \rangle_2 \cdots | \sigma_1 \rangle_N
\end{aligned} \tag{5.56}$$

つぎに、転送行列の対数微分 $\frac{d}{d\lambda} \log \tau(\lambda)$ を議論する。まず、L 演算子の積のトレースの微分は、以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) |_{\lambda=\eta} &= \frac{d}{d\lambda} \text{tr} (L_1(\lambda) \cdots L_N(\lambda)) |_{\lambda=\eta} \\
&= \sum_{j=1}^N \text{tr} \left(L_1(\eta) \cdots L_{j-1}(\eta) \frac{d}{d\lambda} L_j(\lambda) |_{\lambda=\eta} L_{j+1}(\eta) \cdots L_N(\eta) \right) \\
&= (2\eta)^{N-1} \sum_{j=1}^N \text{tr} \left(\Pi^{(0,1)} \cdots \Pi^{(0,j-1)} \cdot I_0 \otimes I_j \cdot \Pi^{(0,j+1)} \cdots \Pi^{(0,N)} \right)
\end{aligned} \tag{5.57}$$

運動量演算子の計算 (5.56) と同様にして、次式を示すことができる。

$$\begin{aligned}
&\text{tr} \left(\Pi^{(0,1)} \cdots \Pi^{(0,j-1)} \cdot I_0 \otimes I_j \cdot \Pi^{(0,j+1)} \cdots \Pi^{(0,N)} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j-1 & j & j+1 & j+2 & \cdots & N \\ N & 1 & \cdots & j-2 & j & j-1 & j+1 & \cdots & N-1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.58}$$

そこで、転送行列の対数微分は、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} \log \tau(\lambda) |_{\lambda=\eta} &= \tau^{-1}(\eta) \frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) |_{\lambda=\eta} \\
&= (2\eta)^{-1} \sum_{j=1}^N \Pi^{(12 \cdots N)} \text{tr} \left(\Pi^{(0,1)} \cdots \Pi^{(0,j-1)} I_0 \otimes I_j \Pi^{(0,j+1)} \cdots \Pi^{(0,N)} \right) \\
&= (2\eta)^{-1} \sum_{j=1}^N \Pi^{(j,j+1)} \\
&= (2\eta)^{-1} \sum_{j=1}^N (\vec{\sigma}_j \cdot \vec{\sigma}_{j+1} + I_j \otimes I_n)
\end{aligned} \tag{5.59}$$

ここで次式を仮定した。

$$\Pi^{(j,j+1)} = \Pi^{(12 \cdots N)} \text{tr} \left(\Pi^{(0,1)} \cdots \Pi^{(0,j-1)} I_0 \otimes I_j \Pi^{(0,j+1)} \cdots \Pi^{(0,N)} \right) \tag{5.60}$$

上式の証明は、置換の計算を用いると以下のように表される。

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j-1 & j & j+1 & j+2 & \cdots & N \\ 2 & 3 & \cdots & j & j+1 & j+2 & j+3 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j-1 & j & j+1 & j+2 & \cdots & N \\ N & 1 & \cdots & j-2 & j & j-1 & j+1 & \cdots & N-1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j-1 & j & j+1 & j+2 & \cdots & N \\ 1 & 2 & \cdots & j-1 & j+1 & j & j+2 & \cdots & N-1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.61}$$

最後の結果は $\Pi^{(jj+1)}$ を表す。また上では便宜上、置換の積を以下のように定義した。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ A & B & C \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ A & B & C \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

5.6 運動量演算子とハミルトニアン固有値

前節では、運動量演算子とハミルトニアンが転送行列から導かれることが示された。このことから特に、転送行列とハミルトニアンは同じ固有ベクトルを持つことが分かった。これらの関係式を用いて、転送行列の固有値の表式から運動量とエネルギーの固有値の表式が導かれる。

最初に、格子運動量演算子の固有値を考える。格子運動量演算子 \hat{P} を指数関数の肩に乗せると、下向きスピンを格子一個分だけ並進させる格子並進演算子が導かれる。

$$\exp(i\hat{P}) = \Pi^{(12\cdots N)} \quad (5.63)$$

一方、転送行列はその引数が特別の値の場合に格子並進演算子の逆演算子を与える。そこで、格子運動量演算子と転送行列との関係は、次式で与えられる。

$$\hat{P} = \frac{1}{i} \log \left((2\eta)^N \tau(\lambda = \eta)^{-1} \right) \quad (5.64)$$

そこで運動量固有値 P は以下のようになる。

$$P = \sum_{j=1}^M \frac{1}{i} \log \left(\frac{\lambda_j + \eta}{\lambda_j - \eta} \right) \quad (5.65)$$

さて、ここで全運動量の値は実数でなければならない。このため、変数 η の値は純虚数でなければならない。その大きさを決めることはラピディティのスケールを決めることであり、これは任意である。ここでは3節で議論した波動関数のベーテ仮設法の計算結果と表式が一致するように選択しよう。そこで以下のようにおく。

$$\eta = i \quad (5.66)$$

すると、全運動量の固有値は以下のようになる。

$$P = \sum_{j=1}^M \frac{1}{i} \log \left(\frac{\lambda_j + i}{\lambda_j - i} \right) = \sum_{j=1}^M k_j \quad (5.67)$$

ここで擬運動量 k_j とラピディティ λ_j の関係式 $\exp(ik_j) = (\lambda_j + i)/(\lambda_j - i)$ を用いた。エネルギー固有値は、ラピディティを用いて以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} E &= \eta J \frac{d}{d\lambda} \log \Lambda(\lambda = \eta)|_{\lambda=\eta} \\ &= -J \sum_{j=1}^M \frac{2}{\lambda_j^2 + 1} \end{aligned} \quad (5.68)$$

5.7 ベーテ仮説固有ベクトルの回転対称性、ベーテ仮説法の「パウリ原理」

ベーテ仮説固有ベクトルが全スピン各運動量演算子の作る $SU(2)$ 対称性の最高ウェイトベクトルであることを、代数的ベーテ仮説法を用いてきちんと証明できる。また、二つのラピディティーが同じ値を持つとき、ベーテ仮説固有ベクトルのノルムがゼロになることを証明できる。ただしこれらの証明をここで説明するのは冗長に過ぎるので省略する。詳しくは、原論文を参照してほしい。[6, 7, 8]

また、量子逆散乱法とソリトン理論との対応は文献 [12] に詳しく書かれている。

6 スtring 仮説と励起状態

6.1 ベーテ仮説方程式の実数解

下向きスピンが M 個のベーテ仮説ベクトルにおいて、その M 個のラピディティー $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ が M 本のベーテ仮説方程式を満たし、 M 個のラピディティーの値がどれも互いに異なるとき、XXX ハミルトニアン固有ベクトルが導かれる。

$$\left(\frac{\lambda_j + i}{\lambda_j - i} \right)^N = \prod_{k \neq j, j=1}^M \left(\frac{\lambda_j - \lambda_k + 2i}{\lambda_j - \lambda_k - 2i} \right), \quad \text{for } j = 1, \dots, M. \quad (6.1)$$

ここで「パウリ原理」、つまりベーテ仮説波動関数の振幅 $A_M(P)$ がゼロにならないためには M 個のラピディティーの値がどれも互いに異なる必要があることを注意しておく。

6 節では、ベーテ仮説方程式の解集合の様子を考察しよう。まずベーテ仮説方程式を分かり易く表現するため、つぎの記号を導入する。[10]

$$e(x) = \frac{x + i}{x - i} \quad (6.2)$$

すると、ベーテ仮説方程式 (6.1) は以下のようになる。

$$e(\lambda_j)^N = \prod_{k \neq j, j=1}^M e\left(\frac{\lambda_j - \lambda_k}{2}\right), \quad \text{for } j = 1, \dots, M. \quad (6.3)$$

まず最初の問題は、この方程式には案外多数の「解」が存在することである。この点を明確にするため、関数 $e(x)$ の対数を考える。

$$\frac{1}{i} \log e(x) = (2n + 1)\pi - 2 \tan^{-1} x \quad (6.4)$$

ここで整数 n は、対数関数の分岐に対応する。ベーテ仮説方程式 (6.3) の両辺の対数を取り、上式 (6.4) を用いて次式が導かれる。

$$2 \tan^{-1} \lambda_j = \frac{2\pi I_j}{N} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M 2 \tan^{-1} ((\lambda_j - \lambda_k)/2) \quad (6.5)$$

ここで M が奇数のとき I_j は整数値、 M が偶数のとき I_j は半整数値をとるものとする。以後、これを簡単に次のように式で表そう。

$$I_j \equiv \frac{M-1}{2} \pmod{2} \quad (6.6)$$

対数形式のベーテ仮設方程式 (6.5) では、対数関数の分岐の選択が、 M 個の整数・半整数 I_j ($j = 1, \dots, M$) の値として表現されている。もともとの乗積形式のベーテ仮設方程式 (6.1) ではそのよう自由度はあからさまには見えないので、対数をとることによって解の個数が増えるように思うかもしれない。しかし本当はそうではなく、もともとの乗積形式のベーテ仮設方程式 (6.1) 自体にすでに多数の「解」が存在し、対数関数の分岐をきちんと定めることによってはじめて正しい解を選択することができる。

このことは次のように説明できる。 M 個の整数・半整数 I_j ($j = 1, \dots, M$) をどのように選んだ場合にも、もし対数形式のベーテ仮設方程式 (6.5) の解が存在すれば、それは指数関数の肩に乘せることにより乗積形式のベーテ仮設方程式 (6.1) を満たす。よって、対数形式のベーテ仮設方程式と乗積形式のベーテ仮設方程式は、 M の偶奇によって I_j の値が整数かあるいは半整数であるという条件 (6.6) の下で、等価である。またベーテ仮設の「パウリ原理」のため、どちらの場合でも M 個のラピディティはどれも互いに異ならないと固有ベクトルを与えないことに注意する。

少し見方を変えて説明しよう。数値計算でベーテ仮設方程式の解を探す場合、しばしば「偽の解」を見つけてしまうことがある。この「偽の解」は本当はベーテ仮設方程式 (6.1) を満たさないのだが、数値精度の範囲内では満たしているように見えることがある。直接方程式に代入して右辺と左辺がほぼ同じ数値になるのだから、解ではないかと考えるのも無理はない。しかし筆者の経験では、対数関数の分岐が少しだけ間違っているときに導かれた「解」は、数値的には正しい解に非常に近い場合がある。

本来はベーテ仮設方程式のみを用いて「偽の解」を見破ることが出来るはずであるが、数値的に非常に近いためにそれが容易にできない場合がある。このような場合には、直接系の物理量を他の方法で求めておき、これと解を用いて計算した値を比較して、その真偽を確かめることができる。例えば、1次元ハバード模型のベーテ仮設方程式の全ての解は、その数値解から導かれる固有エネルギーの値をハミルトニアンの数値対角化から求められた固有エネルギーの数値と比較して検証されている。⁸

以上の話を一言でまとめる。ベーテ仮設方程式の解を求める場合、その分岐 I_j を正しく選択することが本質的に重要である。

6.2 反強磁性 Heisenberg 模型の基底状態

反強磁性 XXX 模型の基底状態のエネルギーを議論しよう。系の大きさは十分大きいと仮定し、 N に関する漸近展開として連続極限の基底エネルギーを求める。

⁸ この部分は、新潟大学自然科学研究科の草部浩一氏他との共同研究である。(T. Deguchi et al [26].)

格子点の総数を N とし、下向きスピンの M 個の場合を考える。このとき、(1) 基底状態には縮退がなくベータ仮説固有ベクトルで与えられ、(2) そのラピディティ λ_j は全て実数、(3) I_j ($j = 1, \dots, M$) の値は最小値の $I_1 = -(M-1)/2$ から最大値の $I_M = (M-1)/2$ まで一つずつ単調に増大する。以上の (1) - (3) の証明がヤン・ヤンによって議論されている。[2] 以下、これらを仮定して、無限系の極限での一格子点当たりの基底状態エネルギーを議論しよう。

ベータ仮説方程式の連続極限を議論するため、いくつか新しい記号を導入する。整数 n に対して、 $\theta_n(x)$ と $a_n(x)$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\theta_n(x) &= \frac{1}{2\pi} 2 \tan^{-1} \left(\frac{x}{n} \right) \\ a_n(x) &= \frac{d}{d\lambda} \theta_n(x) \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2n}{\lambda^2 + n^2}\end{aligned}\quad (6.7)$$

このとき、実変数 λ に対して関数 $Z(\lambda)$ を定義する。

$$Z(\lambda) = \theta_1(\lambda) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M \theta_2(\lambda - \lambda_k) \quad (6.8)$$

ここで右辺の λ_k は、ベータ仮説方程式の実数解であると仮定する。基底状態のベータ仮説方程式は $Z(\lambda)$ を用いて以下のように表される。

$$Z(\lambda_j) = \frac{I_j}{N}, \quad \text{for } j = 1, \dots, M. \quad (6.9)$$

方程式 (6.9) を連続極限で解くことが課題であるが、 N 無限大の極限で両辺は発散する。このため方程式 (6.9) を直接取り扱うのは適当でない。そこで定義式 (6.8) の微分から、ベータ仮説方程式の解の分布関数に対する連続極限を議論しよう。関数 $\rho(\lambda)$ を次のように定める。

$$\rho(\lambda) = \frac{dZ}{d\lambda}(\lambda) \quad (6.10)$$

すると、式 (6.8) から次式が導かれる。

$$\rho(\lambda) = a_1(\lambda) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M a_2(\lambda - \lambda_k) \quad (6.11)$$

次に式 (6.11) の右辺の和を積分で近似しよう。次式の Euler-Maclaurin 公式は、和を積分で近似する際に便利な公式である。

$$\frac{1}{N} \sum_{j=n_1}^{n_2} f\left(\frac{j}{N}\right) = \int_{n_1-1/2}^{n_2+1/2} f(x) dx - \frac{1}{24N^2} \left(\frac{df}{dx}\left(\frac{n_2+1/2}{N}\right) - \frac{df}{dx}\left(\frac{n_1-1/2}{N}\right) \right) + o\left(\frac{1}{L^2}\right). \quad (6.12)$$

これを式 (6.11) に適用する。まず、 $k = 1, \dots, M$ に対応して $I_k = -(M+1)/2 + k$ であるので、 k に関する和を I_k に関する和に書き換える。そして Euler-Maclaurin 公式により

この和を積分で近似する。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M a_2(\lambda - \lambda_k) &= \frac{1}{N} \sum_{j=I_1}^{I_M} a_2(\lambda - \lambda_{k(j)}) \\
 &= \int_{I_-}^{I_+} a_2(\lambda - \lambda_Z) dZ \\
 &= \int_{\lambda_-}^{\lambda_+} a_2(\lambda - \lambda') \frac{dZ}{d\lambda'} d\lambda' \\
 &= \int_{\lambda_-}^{\lambda_+} a_2(\lambda - \lambda') \rho(\lambda') d\lambda' \quad (6.13)
 \end{aligned}$$

I_{\pm} は各々 $I_+ = I_M + 1/2$ および $I_- = I_1 - 1/2$ によって定義される。これらの積分範囲は Euler-Maclaurin 公式における積分範囲に対応している。さらに λ_{\pm} は I_{\pm} から $Z(\lambda_{\pm}) = I_{\pm}/N$ で定義される。

ここで関数 $\rho(\lambda)$ の意味を考えてみよう。基底状態では $I_{j+1} = I_j + 1$ であることと、関数 $Z(\lambda)$ で表されたベーテ仮設方程式 (6.9) から次式が導かれる。

$$Z(\lambda_{j+1}) - Z(\lambda_j) = \frac{I_{j+1}}{N} - \frac{I_j}{N} = \frac{1}{N} \quad (6.14)$$

そこで、解が十分稠密に分布していれば以下のように近似できる。

$$Z(\lambda_{j+1}) - Z(\lambda_j) \approx \frac{Z(\lambda)}{d\lambda} \times (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \quad (6.15)$$

よって、

$$\rho(\lambda_j) \approx \frac{1}{N} \frac{1}{\lambda_{j+1} - \lambda_j} \quad (6.16)$$

となり、 $\rho(\lambda)$ はベーテ仮設方程式の実数解の分布関数を補間する連続関数である。

$\lambda_{\pm} = \pm\infty$ の場合に解の分布関数 $\rho(\lambda)$ を解析的に容易に計算できる。フーリエ変換の記号を確定する。例として $\hat{\rho}(x)$ を次式で定める。

$$\hat{\rho}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega\lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad (6.17)$$

このときその逆フーリエ変換は、次のようになる。

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega\lambda) \hat{\rho}(\omega) d\omega \quad (6.18)$$

分布関数 $\rho(\lambda)$ に関する積分方程式をフーリエ変換すると、次式が導かれる。

$$\hat{\rho}(\omega) = \hat{a}_1(\omega) - \hat{\rho}(\omega) \hat{a}_2(\omega) \quad (6.19)$$

関数 $a_n(x)$ のフーリエ変換は以下で与えられるので、

$$\hat{a}_n(\omega) = \exp(-n|\omega|) \quad (6.20)$$

上式(6.19)から $\hat{\rho}(\lambda)$ は容易に求められる。

$$\hat{\rho}(\omega) = \frac{\hat{a}_1(\omega)}{1 + \hat{a}_2(\omega)} = \frac{1}{2 \cosh \omega}. \quad (6.21)$$

積分の上限下限の変数が無限大 ($\lambda_{\pm} = \pm\infty$) のとき、下向きスピンの数 M は $N/2$ である。これは以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{M}{N} &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \hat{\rho}(0) = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (6.22)$$

上式中の分布関数の積分は分布関数 $\rho(\lambda)$ の $\omega = 0$ のときのフーリエ成分であり、 $\hat{\rho}(\lambda)$ の表式から分かる。

一格子点あたりの基底エネルギー e_{∞} は、以下のように計算される。

$$\begin{aligned} e_{\infty} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E}{N} \\ &= - \lim_{N \rightarrow \infty} J \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M \frac{2}{1 + \lambda_k^2} \\ &= -J \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + \lambda^2} \rho(\lambda) d\lambda \\ &= -J \log 2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

つぎに、格子運動量の値を議論する。

$$P = \sum_{j=1}^M k_j \pmod{2\pi} \quad (6.24)$$

公式 $e^{ik} = (\lambda + i)/(\lambda - i)$ により k の値をラピディティ λ に変換した後にベーテ仮設方程式を用いると、整数（半整数） I_j の和で与えられる。

$$\begin{aligned} P &= \sum_{j=1}^M k_j = M\pi - 2\pi \sum_{j=1}^M \theta_1(\lambda_j) \\ &= M\pi - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^M I_j \end{aligned} \quad (6.25)$$

基底状態では、系の格子運動量の値は $P = N\pi/2 \pmod{2\pi}$ である。

6.3 ホール励起状態

励起状態のエネルギーはベーテ仮設方程式を解いてどのように求めれば良いであろうか。本節ではストリング仮説に基づいて、物理的にもっともらしいと思わせるような議論を展開してみよう。ただし、励起状態に関する数学的に厳密な議論は、現在まだ存在していないことを注意しておく。

定義式(6.8)より、 I_j の値域には限界があることが分かる。定義式(6.8)を満足する I_j の最大値と最小値を各々 I_{max} と I_{min} とする。このとき、 I_{max} と I_{min} に対応するラピディティは有限の値であるはずなので、次のような条件が考えられる。

$$Z(-\infty) < I_{min}, \quad I_{max} < Z(\infty) \quad (6.26)$$

具体的には $Z(\infty)$ 次のような値である。

$$\begin{aligned} Z(\infty) &= \theta_1(\infty) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M \theta_2(\infty) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M \frac{1}{2} \\ &= \frac{N-M}{2N} \end{aligned} \quad (6.27)$$

さらにもともと I_j は $(M-1)/2$ と同じパリティを満たさなければならない。本解説では N は偶数であると仮定しているので、以上の考察から、 I_{max} と I_{min} は次のようになる。

$$I_{max} = \frac{N-M-1}{2}, \quad I_{min} = -\frac{N-M-1}{2} \quad (6.28)$$

前節で基底エネルギーを議論した $N = 2M$ の場合の基底状態では $I_{min} = -(M-1)/2$ および $I_{max} = (M-1)/2$ であり、 I_1 から I_M まで I_j として可能な値を全部占有している。一方、下向きスピンの数が $N/2$ より少ない場合は、 $I_{min} < -(M-1)/2$ および $(M-1)/2 < I_{max}$ であり、基底状態の I_j の値の以外にも可能な値が存在する。

一個だけホール（正孔）を持つ励起状態を仮定して、その励起エネルギーを計算してみよう。ホールは、 $j = j_h$ から $j = j_h + 1$ の間の I_j の値の「とび」に対応する。

$$I_{j+1} = I_j + 1 + \delta_{j,j_h} \quad (6.29)$$

I_j における「とび」は、階段関数で表現できる。階段関数 $H(x)$ を、 $x < 0$ のとき $H(x) = 0$ 、 $x > 0$ のとき $H(x) = 1$ 、とする。するとホール励起の $Z(\lambda)$ は以下で与えられる。

$$Z(\lambda_j) = \frac{1}{N} \left(j - \frac{(M-1)}{2} + H(j - j_h) \right), \quad \text{for } j = 1, \dots, M \quad (6.30)$$

まず j に関する差分から、 $Z(\lambda_{j+1}) - Z(\lambda_j) = (1 + \delta_{j,j_h})/N$ となり、一方連続極限では $Z(\lambda_{j+1}) - Z(\lambda_j) \approx \frac{dZ}{d\lambda}(\lambda_{j+1} - \lambda_j)$ である。ホールが存在する励起状態における実数解 λ_j の分布関数 $\rho(\lambda)$ は次式のように定義できる。

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{N(\lambda_{j+1} - \lambda_j)} \quad (6.31)$$

ホールのラピディティ λ_{j_h} を λ_h と表すことにする。以上から次式が導かれる。

$$\frac{dZ}{d\lambda} = \rho(\lambda) + \frac{1}{N} \delta(\lambda - \lambda_h) \quad (6.32)$$

もともとの $Z(\lambda)$ の定義式 (6.8) から、次式を得る。

$$\rho(\lambda) + \frac{1}{N} \delta(\lambda - \lambda_h) = a_1(\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} a_2(\lambda - \lambda') \rho(\lambda') d\lambda' \quad (6.33)$$

これがホール存在下における分布関数に対する積分方程式である。

分布関数 $\rho(\lambda)$ は、ホールの影響のために基底状態の分布関数 $\rho_g(\lambda)$ とは少しだけ異なっているはずである。これを $\sigma(\lambda)/N$ と表そう。(ホールのために生じるバックフローである。)

$$\rho(\lambda) = \rho_g(\lambda) + \frac{1}{N} \sigma(\lambda) \quad (6.34)$$

すると、 $\sigma(\lambda)$ は次の積分方程式の解である。

$$\sigma(\lambda) + \int_{\lambda_-}^{\lambda_+} a_2(\lambda - \lambda') \sigma(\lambda') d\lambda' = -\delta(\lambda - \lambda_h) \quad (6.35)$$

ここで積分範囲は下向きスピンの数と運動量の値と関係して決められる。

上の積分方程式を一般の積分範囲で求めるのはかなり大変である。そこで簡単のため、ここでは $\lambda_- = -\infty$ 、 $\lambda_+ = \infty$ の場合を考える。上の積分方程式をフーリエ変換して次式を得、

$$\sigma(\omega) + \hat{a}_2(\omega) \sigma(\omega) = -e^{i\omega\lambda_h} \quad (6.36)$$

逆フーリエ変換により以下のように求められる。

$$\sigma(\lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega(\lambda_h - \lambda))}{1 + \exp(-2|\omega|)} d\omega \quad (6.37)$$

励起エネルギーを計算しよう。励起状態のエネルギー E_{ex} は

$$E_{ex} = -J \sum_{j=1}^M \frac{2}{\lambda_j^2 + 1} = -J \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\lambda_j^2 + 1} \rho(\lambda) d\lambda \quad (6.38)$$

そこで基底エネルギー E_g との差 ΔE は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_{ex} - E_g \\ &= -J \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\lambda_j^2 + 1} \sigma(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{\pi J}{2} \frac{1}{\cosh(\pi\lambda_h/2)} \end{aligned} \quad (6.39)$$

6.4 反強磁性基底状態における素励起：スピノン

反強磁性基底状態における素励起（スピノン）を考察しよう。ゼロ磁場のときの基底状態での下向きスピンの個数 M は $M = L/2$ である。第一励起状態を考えるため、下向きスピンの数が一個だけ少ないとする。つまり $M = N/2 - 1$ である。このとき、 $I_{max} =$

$(N - M - 1)/2 = N/4$ および $I_{\min} = -(N - M - 1)/2 = -N/4$ 占有可能な状態は全部で $I_{\max} - I_{\min} + 1 = N/2 + 1$ 個である。一方下向きスピンの数は $N/2 - 1$ なので、

$$(I_{\max} - I_{\min} + 1) - M = (N/2 + 1) - (N/2 - 1) = 2 \quad (6.40)$$

2 個の整数（半整数）が占有されないことになる。これらは前節で議論したホールに相当し、占有されない 2 個の整数（半整数）の値を I_{h_1} 、 I_{h_2} と表す。ここで注目すべきなのは、一個だけ下向きスピンの数を減少させると、必ず 2 個ホールが生じてしまうことである。反強磁性基底状態においては、ホールを 1 個だけ作るような励起状態は存在せず、励起状態は必ず 2 個のホールを伴う。そして I_{h_1} と I_{h_2} の 2 個のパラメータを持つので、「キンク解」とよばれる。

反強磁性基底状態におけるホール励起は、2 個対になって出現する。これをスピノンという。上で説明したように、キンク解である。さて、反強磁性基底状態では積分範囲は $\lambda_+ = \infty$ および $\lambda_- = -\infty$ で与えられる。前節の計算ではホール一個分の励起エネルギーしか考えなかったが、積分範囲が $\lambda_+ = \infty$ および $\lambda_- = -\infty$ の場合にはこれは間違いで、2 個のホールのエネルギーの和を求めてはじめて正しい素励起エネルギーが計算される。そこで次式から出発すべきである。

$$\frac{dZ(\lambda)}{d\lambda} = \rho(\lambda) + \frac{1}{N} (\delta(\lambda - \lambda_{h_1}) + \delta(\lambda - \lambda_{h_2})) \quad (6.41)$$

まず最初に運動量を計算しよう。 $P = M\pi - 2\pi \sum_{j=1}^M I_j / N \pmod{2\pi}$ を用いると、

$$\begin{aligned} P_{ex} &= \left(\frac{N}{2} - 1\right)\pi - \frac{2\pi}{N} \sum_{j=1}^M I_j \\ &= \left(\frac{N}{2} - 1\right)\pi + \frac{2\pi}{N} (I_{h_1} + I_{h_2}) \end{aligned} \quad (6.42)$$

よって、運動量変化 ΔP は

$$\Delta P = \pi + \frac{2\pi}{N} (I_{h_1} + I_{h_2}) \pmod{2\pi} \quad (6.43)$$

である。つぎに整数（半整数） I_{h_1} と I_{h_2} をラビディティイーで表したい。連続変数での表示を求めるため、 $1/N$ のべきによる漸近展開を考える。このとき、 I_{h_1}/N は $O(1)$ （オーダー 1）であることに注意して、積分を近似してよい。

$$\begin{aligned} \frac{I_{h_1}}{N} &= Z(\lambda_{h_1}) = \int_{-\infty}^{\lambda_{h_1}} \frac{dZ}{d\lambda} d\lambda + Z(-\infty) \\ &= \int_{-\infty}^{\lambda_{h_1}} \rho(\lambda) d\lambda + Z(-\infty) + O(1/N) \\ &= \int_{-\infty}^{\lambda_{h_1}} \rho_g(\lambda) d\lambda + Z(-\infty) + O(1/N) \end{aligned} \quad (6.44)$$

上式では式 (6.41) における $O(1/N)$ の項を落とし、さらに分布関数における $1/N$ のオーダーを無視した。こうして、 I_h と λ_h を結び付ける次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{I_{h_1}}{N} &= \int_{-\infty}^{\lambda_{h_1}} \frac{1}{4} \operatorname{sech}(\pi\lambda/2) d\lambda - \frac{1}{4} + O(1/N) \\ &= \frac{1}{2\pi} 2 \tan^{-1}(\tanh(\pi\lambda_{h_1}/4)) + O(1/N) \end{aligned} \quad (6.45)$$

そこで運動量変化は、 $\Delta P = q_1 + q_2$ ($0 \leq q_1, q_2 \leq \pi$) と表される。ただし q_1 と q_2 は次式で定められる。

$$q_j = \frac{\pi}{2} + 2 \tan^{-1} \left(\tanh(\pi \lambda_{h_j}/4) \right), \quad \text{for } j = 1, 2 \quad (6.46)$$

こうして励起エネルギーは

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_{ex} - E_g = \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ &= \frac{\pi}{2} J \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2} \lambda_{h_1}\right) + \frac{\pi}{2} J \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2} \lambda_{h_2}\right) \end{aligned} \quad (6.47)$$

であり、スピノンの分散関係は次式のようにになる。⁹

$$\epsilon_j = \frac{\pi}{2} J \sin q_j \quad j = 1, 2. \quad (6.48)$$

この分散関係において $q_j \rightarrow 0$ あるいは $q_j \rightarrow \pi$ のとき、 $\epsilon_j \rightarrow 0$ と限りなくゼロに近づくのでギャップレス励起であることが分かる。

6.5 ストリング解 – ベーテ仮設方程式の複素解

これまではラピディティは全て実数であると仮定していた。しかし、ベーテ仮設方程式には一般に複素数の解も存在する。簡単のため最初に $M = 2$ の場合に互いに複素共役な 2 個のラピディティ λ_α^\pm を考えよう。

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha^+ &= \lambda_\alpha + i + i\epsilon \\ \lambda_\alpha^- &= \lambda_\alpha - i - i\epsilon \end{aligned} \quad (6.49)$$

ここで ϵ は非常に小さな数であると仮定して、ベーテ仮設方程式の中に $\lambda_j = \lambda_\alpha^\pm$ として代入してみよう。するとベーテ仮設方程式の右辺は次のようになる。

$$e(\lambda_\alpha^+)^N = \left(\frac{\lambda_\alpha + 2i}{\lambda_\alpha} \right)^N = \left(\frac{\sqrt{\lambda_\alpha^2 + 4}}{|\lambda_\alpha|} \right)^N \gg 1 \quad (6.50)$$

ここで N は 1 に比較して十分大きいので、左辺の絶対値は非常に大きくなる。次にベーテ仮設方程式の右辺へ代入すると、分母が非常に小さくなるため、右辺全体の絶対値は非常に大きくなる。

$$\frac{\lambda_\alpha^+ - \lambda_\alpha^- + 2i}{\lambda_\alpha^+ - \lambda_\alpha^- - 2i} \approx \frac{4i}{2i\epsilon} \gg 1 \quad (6.51)$$

こうして、ベーテ仮設方程式の右辺も左辺も非常に大きくなるため、その大きさが釣り合うと λ_α^\pm が解となることが期待される。そして実際、解になる場合が存在する。このような複素数の解は、下向きスピン同士の束縛状態を与える。

⁹ ここで $\epsilon = \frac{\pi}{2} J \operatorname{sech} 2x$ に関する計算を補足する。 $\tan p' = \tanh x$ とおくと、 $\operatorname{sech} 2x = (1 - \tanh^2 x)/(1 + \tanh^2 x) = \cos p'$ が導かれる

以上のような議論を少し一般化する。分母が非常に小さくなったのは、この2個のラピディティの差が $\pm 2i$ に非常に近かったからである。そこで、ラピディティの差が $\pm 2i$ であるようなラピディティの組を解として仮定することは自然な試みであろう。こうして、一般に n -ストリング解が導かれる。

$$\lambda_\alpha^{n,j} = \lambda_\alpha^n + i(2n+1-2j) + \epsilon_\alpha^{n,j}, \quad \text{for } j = 1, \dots, n. \quad (6.52)$$

ここで $\epsilon_\alpha^{n,j}$ の絶対値は 1 に比較して非常に小さいと仮定する。また、主要な実数部分 λ_α^n をストリングセンターとよぶ。以下に $n = 3$ の場合、すなわち 3-ストリング解の例を挙げる。

$$\lambda_\alpha^{3,1} = \lambda_\alpha + 2i + \epsilon_\alpha^{3,1}, \lambda_\alpha^{3,2} = \lambda_\alpha + \epsilon_\alpha^{3,2}, \lambda_\alpha^{3,3} = \lambda_\alpha - 2i + \epsilon_\alpha^{3,3}, \quad (6.53)$$

ストリング解を議論する際には、全てのストリング解において補正項が N に関して指数関数的に小さくなることを、しばしば暗黙の内に前提とすることがある。また、実数値の解を 1-ストリング解とみなすと、ベーテ仮設方程式の全ての解は何らかのストリング解であると仮定する見方も存在する。

もし全てのストリング解において補正項 ϵ の絶対値が非常に小さいならば、ストリングセンター λ_α^n を与えればストリング解は実質的に決まってしまう。そこでベーテ仮設方程式の全ての解がストリング解で良く近似されると仮定して、ストリングセンターに対する方程式を導こう。下向きスピンの M 個のとき、 M 個全てのラピディティがどれもある n ストリング解に所属すると仮定する。 n ストリング解のストリングセンターが M_n 個であるとする、 $M = \sum_{n=1}^{\infty} nM_n$ となる。このとき、さらに補正項が非常に小さいと仮定すると、ストリングセンターに対して次の方程式が導かれる。

$$\theta(\lambda_\alpha^n) = \frac{J_\alpha^n}{N} + \frac{1}{N} \sum_{(m,\beta) \neq (n,\alpha)} \Theta_{nm}(\lambda_\alpha^n - \lambda_\beta^m) \quad (6.54)$$

ここで記号 (m, β) はストリングセンター λ_β^m を表す。従って、和の記号は λ_α^n を除く全てのストリングセンターに関する和を意味する。また、整数（半整数） J_α^n のパリティは次で定められる。

$$J_\alpha^n = (M_n - 1)/2 \pmod{1} \quad (6.55)$$

また、関数 $\Theta_{nm}(x)$ は次で定義される。

$$\Theta_{nm}(x) = \begin{cases} \theta_{|n-m|}(x) + 2\theta_{|n-m|+2}(x) + \dots + 2\theta_{n+m-2}(x) + \theta_{n+m}(x) & (n \neq m) \\ 2\theta_2(x) + \dots + 2\theta_{2n-2}(x) + \theta_{2n}(x) & (n = m > 1) \\ \theta_2(x) & (n = m = 1) \end{cases} \quad (6.56)$$

方程式 (6.54) がベーテ仮設方程式に代わる基本方程式となる。これを用いて様々な熱力学の物理量が計算されている。[10]

ストリングセンターに対する方程式 (6.54) は近似式であることに注意する。ベーテ仮設方程式と決して等価ではない。実際にベーテ仮設方程式の複素数解を求めるためには、もっ

と複雑な「分岐の選択」の議論をしなければならない場合が多い。[26] 従って、一般にはストリングセンターに対する方程式 (6.54) の解を求めることとベータ仮説方程式の複素数解の解法は全く独立な問題である。

6.6 ストリング解の数え上げ

ストリング仮説の前提の下で、ストリング解の個数を議論しよう。まず関数 $Z_n(\lambda)$ を次式で定義する。

$$Z_n(\lambda) = \theta_n(\lambda) - \frac{1}{N} \sum_{(m,\beta)} \Theta_{nm}(\lambda_\alpha^n - \lambda_\beta^m) \quad (6.57)$$

これを用いると、ストリングセンターの方程式 (6.54) は、以下のように表される。

$$Z_n(\lambda_j) = J_\alpha^n / N \quad (6.58)$$

さて、ここでストリング仮説が正しいと仮定しよう。つまり、 $dZ_n/d\lambda > 0$ を仮定する。このとき、整数（半整数） J_α^n の値の最大値 J_{max}^n および最小値 J_{min}^n は、次の条件式を用いて評価されるであろう。

$$Z_n(-\infty) < J_{min}^n, \quad J_{max}^n < Z_n(\infty) \quad (6.59)$$

後の便利のため、次のような整数（半整数） T_n を導入する。

$$T_n = (N - 1 - \sum_{m=1}^{\infty} t_{nm} M_m) / 2 \quad (6.60)$$

ここで t_{nm} は次式で定められる。

$$t_{nm} = 2\min(m, n) - \delta_{n,m} \quad (6.61)$$

さて、 $Z_n(\infty)$ は以下のように評価される。

$$Z_n(\infty) = (N - \sum_{m=1}^{\infty} t_{nm} M_m) / 2 = T_n + 1/2 \quad (6.62)$$

一方、整数（半整数） J_α^n のパリティ（整数あるいは半整数）を考慮すると、 J_{max}^n は $Z_n(\infty)$ よりも少なくとも $1/2$ だけ小さいことが分かる。つまり、 $J_{max}^n \leq T_n$ である。実際には、

$$J_{min}^n = -T_n, \quad J_{max}^n = T_n \quad (6.63)$$

であることが数え上げの議論から示唆されている。[1, 10] 整数（半整数） J_α^n の最大値と最小値 (6.63) を仮定して全てのストリング解の場合の個数を数え上げると、固有状態の数が全部で 2^N 個となり、完全性が満足される。従って、最大値と最小値の評価式 (6.63) は正しいであろう、という論法である。

下向きスピンの数を M 、各 n に対して n -ストリングのストリングセンターの個数を M_n であるようなベータ仮説固有ベクトルの総数を $Z(N; M_1, M_2, \dots)$ と表そう。（ここで

$M = \sum_n n M_n$ である。) さて、各々の n に対して n -ストリングの整数 (半整数) J_α^n は $2T_n + 1$ 個の値が可能で、その中から M_n 個の値を選ぶとベータ仮説固有状態が一個指定されると仮定する。このとき、次式が導かれる。

$$Z(N; M_1, M_2, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \binom{2T_n + 1}{M_n} \quad (6.64)$$

下向きスピンの数が M 個のベータ固有状態の数 $Z(N, M)$ は

$$Z(N, M) = \sum_{M_1, M_2, \dots; M_1 + 2M_2 + 3M_3 + \dots = M} Z(N; M_1, M_2, \dots) \quad (6.65)$$

によって与えられる。ここでこの和を計算するベータの議論を少し紹介する。[1] まず、ストリングセンターの数を表す変数を q とする。つまり、

$$q = \sum_n M_n \quad (6.66)$$

である。下向きスピ数が M 個、ストリングセンターが q 個のベータ固有ベクトルの総数 $Z(N, M, q)$ は、以下のように求められている。

$$Z(N, M, q) = \frac{N - 2M + 1}{N - M + 1} \binom{N - r + 1}{q} \binom{r - 1}{q - 1} \quad (6.67)$$

この結果から、 $Z(N, M)$ は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} Z(N, M) &= Z(N, M, q) \\ &= \frac{N - 2M + 1}{N - M + 1} \sum_{q=0}^M \binom{N - r + 1}{N - r - q + 1} \binom{r - 1}{q - 1} \\ &= \frac{N - 2M + 1}{N - M + 1} \binom{N}{M} \end{aligned} \quad (6.68)$$

ここで2項係数の公式 (B.7) を用いた。また、 $Z(N, M, q)$ の導出は Appendix B で議論される。

以上の議論をまとめる。もし J_α^n の最大値と最小値の公式 (6.63) が正しいとすると、ベータ仮説方程式のストリング解はまさに全ての状態を過不足なく与える分だけ存在する。ストリング解の個数の議論でどこに正しくない可能性があるかと言えば、実はセンターの分布関数の正值性: $dZ_n/d\lambda > 0$ である。 λ が十分大きい場合には、この条件が破綻している可能性があり、実際に2ストリングの場合に必ず破綻する。実に興味深いことに、ベータ仮説の第一論文 [1] ですでにこの限界が指摘されているにもかかわらず、ストリング解の破綻が物理量の計算値に影響するかどうかは最近になってはじめて研究されはじめた。[26] 著者の個人的見解では、ストリング仮説を用いた熱力学量の計算はある種の漸近的解析と見なすべきで、熱力学的極限でのみ正しいのではないかと思う。ここから先の議論は今後の課題であろう。

7 厳密解の低励起スペクトルの特徴付けと共形場理論 (CFT)

厳密に解ける模型では全てのエネルギー固有値が解析的に求められる。基底状態の近傍の低いエネルギー励起状態の様子は、線形分散関係が近似的に成り立つ範囲で共形場理論、あるいはボソン化法を用いて特徴付けることが可能である。

共形場理論が成立する系として、長さ L の周期的境界条件を満たす自由スカラーボソン場を考えよう。ラグランジアンは以下のように与えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g \int dx \{ (\partial_t \phi)^2 - (\partial_x \phi)^2 \} \quad (7.1)$$

場 ϕ の値は半径 R の円周上に制限されていると仮定する。これはもともとのストリング理論ではコンパクト化半径に対応する。場の値はある次元に関しては縮退して観測できない、という物理的要請 (仮定) である。

次に、スカラーボソン場の周期的境界条件を以下のように与える。

$$\phi(x+L) = \phi(x, t) + 2\pi \hat{m} R \pmod{2\pi R} \quad (7.2)$$

ここで演算子 \hat{m} の固有値 m は整数値をとるものとする。状態ベクトルによって演算子 \hat{m} の固有値 m は異なる。しかし、整数値であれば境界条件は満たされる、と考えられる。

有限サイズの補正の計算から、量子スピン系の低励起スペクトルは以下のように展開される。

$$E_{ex} = N e_\infty - \frac{\pi c}{6L} + \frac{2\pi v}{L} (h_{n,m} + \bar{h}_{n,m} + N + \bar{N}) \quad (7.3)$$

c はセントラルチャージ、 $h_{n,m}$ ($\bar{h}_{n,m}$) は正則な (反正則な) コンフォーマル次元、 N (\bar{N}) は粒子・ホール励起に対応する非負整数である。系の臨界指数などを与えるコンフォーマル次元 $h_{n,m}$ は、次式のように与えられる。

$$h_{n,m} = 2\pi g \left(\frac{n}{4\pi g R} + \frac{1}{2} m R \right)^2 \quad (7.4)$$

ここで m は境界条件に関係し、 n は状態の運動量の量子数に対応する。

臨界指数などを CFT で求める際にも低励起スペクトルが連続理論と一致するように結合定数を選ぶ必要があり、このとき Bethe 仮説解が用いられる。ゼロ磁場下の XXZ 模型において、対応する半径 R を議論してみよう。自由フェルミオンからの摂動論では以下のような展開式が求められる。(異方性変数 Δ の絶対値が小さいとする。)

$$R = \left[\frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{2\Delta}{\pi} \right) \right] \quad (7.5)$$

一方、厳密な解析からは次式が導かれる。

$$R = \left\{ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi^2} \cos^{-1}(\Delta) \right\} \quad (7.6)$$

可解量子スピン系に関しては解説書 [14] があり、共形場理論との関係などが非常に分かりやすく書かれている。

8 可解模型に関連する数理物理の話題

8.1 対称群と組みひも群

8.1.1 演算子形式のヤン・バクスター方程式

2次元古典統計模型のヤン・バクスター関係式は、その転送行列が交換するための十分条件であった。しかし少し見方を変え、同じ関係式がいくつもの異なった分野に登場する。

ここでは、ヤン・バクスター関係式と対称群や組みひも群との関係を議論する。このために、ヤン・バクスター関係式をもう少し見通しの良い形式に整理する。すなわち、前節では、三つのボルツマン重率の積とその和の形式で表されていたが、本節ではこれを演算子の形式に表現する。

ボルツマン重率 $w(a_1, b_1 | a_2, b_2; u)$ をテンソル積表示に都合が良いように $x_{b_1, b_2}^{a_1, a_2}(u)$ と表そう。

$$x_{b_1, b_2}^{a_1, a_2}(u) = w(a_1, b_1 | a_2, b_2; u) \quad (8.1)$$

全ての行列要素の中で j 行 k 列のみが 1 で他は全てゼロとなる行列を E_k^j と書こう。

$$(E_k^j)_b^a = \delta_{a,j} \delta_{b,k} \quad a, b = 1, 2. \quad (8.2)$$

演算子 $X_j(u)$ を次式で定義する。

$$X_j(u) = \sum_{a,b,c,d} x_{b,d}^{a,c}(u) \overbrace{I \otimes \cdots \otimes I}^{\otimes(j-1)} \otimes E_b^a \otimes E_d^c \otimes \overbrace{I \otimes \cdots \otimes I}^{\otimes(N-j-1)} \quad (8.3)$$

ただし $j = 1, \dots, N-1$ とする。これらの演算子を用いると、ヤン・バクスター関係式 (4.30) は次式で表現される。

$$X_j(u)X_{j+1}(u+v)X_j(v) = X_{j+1}(v)X_j(u+v)X_{j+1}(u), \quad \text{for } j = 1, \dots, N-1. \quad (8.4)$$

上式に (8.3) を代入すると、ボルツマン重率に対するヤン・バクスター関係式 (4.30) が導かれる。

8.1.2 組みひも群

演算子形式のヤン・バクスター関係式においてスペクトルパラメータを無限大にとると、もし極限が存在すればそれは次のような関係式を満たす。

$$X_j(\infty)X_{j+1}(\infty)X_j(\infty) = X_{j+1}(\infty)X_j(\infty)X_{j+1}(\infty), \quad \text{for } j = 1, \dots, N-1. \quad (8.5)$$

これは、組みひも群の定義関係式を与える。

N 本のひもの組みひも群 B_N とは生成子 b_1, \dots, b_{N-1} が次の定義関係式を満たすとして定義される無限群である。[17]

$$\begin{aligned} b_j b_{j+1} b_j &= b_{j+1} b_j b_{j+1} \\ b_i b_j &= b_j b_i \quad \text{for } |i-j| > 1 \end{aligned} \quad (8.6)$$

いくつか具体例を考えてみよう。簡単のため、ボルツマン重率を次式で表そう。

$$X(u) = \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} x_{b_1 b_2}^{a_1 a_2}(u) E_{b_1}^{a_1} \otimes E_{b_2}^{a_2} \quad (8.7)$$

次のようなボルツマン重率に対して、その極限を求めてみよう。

$$X(\lambda) = \begin{pmatrix} \sinh(\lambda + 2\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh(2\eta) & \sinh(\lambda) & 0 \\ 0 & \sinh(\lambda) & \sinh(2\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh(\lambda + 2\eta) \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

このとき 次のような組みひも群の表現行列が導かれる。

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} X(\lambda) / \sinh(\lambda + 2\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-2\eta) & 0 \\ 0 & \exp(-2\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

また、次の式で与えられるボルツマン重率もヤン・バクスター関係式を満たすことが示される。

$$\tilde{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} \sinh(\lambda + 2\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-\lambda) \sinh(2\eta) & \sinh(\lambda) & 0 \\ 0 & \sinh(\lambda) & \exp(\lambda) \sinh(2\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh(\lambda + 2\eta) \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

この場合には、次の組みひも群の表現行列が導かれる。

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{X}(\lambda) / \sinh(\lambda + 2\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-2\eta) & 0 \\ 0 & \exp(-2\eta) & 1 - \exp(-4\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

組みひも群に関しては、様々な数理解物理の話題が結び付いている。[18, 19, 20, 21]

8.2 量子群（ホップ代数）

ボルツマン重率から出発して、組みひも群の表現が導かれた。可解模型から導かれるような組みひも群の表現行列は、量子群によって数学的に定式化できる。さらに、量子群から様々な新しい可解模型が導かれる。[18, 20, 21]

量子群の例として $U_q(sl_2)$ を考察する。生成子 X^\pm, H は以下の関係式を満たす。

$$KX^\pm K^{-1} = q^{\pm 2} X^\pm, \quad [X^+, X^-] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \quad (8.12)$$

ただし $K = q^H$ である。以上の関係式は $q \rightarrow 1$ とすると通常の $sl(2)$ の交換関係に帰着する。

量子群ではテンソル積の規則が通常の場合と異なっている。(テンソル積の規則とは、物理的な例では、角運動量の合成則のことである。) 通常のスピン演算子の場合を復習する。ベクトル空間 V_1 と V_2 の上に各々スピン演算子 \vec{S}_1 と \vec{S}_2 が定義されているとする。このとき、ベクトル空間のテンソル積 $V_1 \otimes V_2$ の上に作用する全スピン角運動量演算子 \vec{S}_{12} は

$$\vec{S}_{12} = \vec{S}_1 \otimes I + I \otimes \vec{S}_2 \quad (8.13)$$

で与えられる。この合成演算子 \vec{S}_{12} を $\Delta(\vec{S})$ と表そう。量子群の場合には合成演算子が次のように定められている。

$$\begin{aligned} \Delta(K) &= K \otimes K \\ \Delta(X^+) &= X^+ \otimes I + K \otimes X^+ \\ \Delta(X^-) &= X^- \otimes K + I \otimes X^- \end{aligned} \quad (8.14)$$

ベクトル空間 V_1 と V_2 のテンソル積として、 $V_1 \otimes V_2$ と同様にこれをひねった $V_2 \otimes V_1$ を考えることができる。量子群の R 行列とはこのふたつのテンソル積の間をつなぐ写像 (intertwiner) である。次のような関係式を満たす。

$$R\Delta(x) = \tau\Delta(x)R, \quad x \in U_q(sl_2) \quad (8.15)$$

ここで記号 τ はツイストを意味する。

$$\tau e_1 \otimes e_2 = e_2 \otimes e_1, \quad \text{for } e_1 \in V_1, e_2 \in V_2. \quad (8.16)$$

普遍 R 行列とは、上の関係式 (8.15) を演算子レベルで満たすものである。

$$\mathcal{R} = q^{-H \otimes H/2} \exp_q \left(-(q - q^{-1}) K^{-1} X^+ \otimes X^- K \right) \quad (8.17)$$

ただし $\exp_q x$ は次式のような無限和を表す。

$$\exp_q x = \sum_{n=0}^{\infty} q^{-n(n-1)/2} \frac{x^n}{[n]!} \quad (8.18)$$

実は普遍 R 行列の表現から、組みひも群の表現行列が与えられる。[18, 20, 21] (普遍 R 行列は任意次元の組みひも群の表現行列を与える。) 実際、スピン $1/2$ 表現の場合には前の節の組みひも群の表現 (8.11) が導かれる。(変数 q が $\exp 2\eta$ に対応する。)

9 有限系の厳密解とメゾスコピック系への応用可能性

ベーテ仮説の方法には、ベーテ仮設方程式を導出する部分とストリング仮説など完全性に関する部分の二つの側面がある。励起状態の物理量の計算はストリング仮説を前提とする場合が多い。前者の部分は数学的に厳密に議論できるが、後者の部分は他の方法と比較するなど一般にはその計算の妥当性を確認する必要がある。この結果、「ベーテ仮説の方法で解かれた」とは言っても、熱力学的極限の取り方など物理的状況が異なる場合には全く新たな方法で研究する必要があると筆者は考えている。

例えば、有限サイズの厳密解のスペクトルの研究はまだあまり問題意識が一般的になっていないのではないだろうか。最も極端な場合を挙げると、ベンゼン環など6個の格子点からなる周期的格子鎖上の1次元ハバード模型の固有スペクトルの解析が興味深い。この場合には、スピン・電荷分離は全く成立しないパラメータ領域が存在し、そこではレベル交差が多数存在する。1次元ハバード模型において、スピン・電荷分離は系のサイズが十分大きい場合にはギャップ励起も含めて一般的に成立する現象であるが、系のサイズあまり大きくないと状況は一変するのである。熱力学的ベーテ仮説の諸方法は、おそらく転送行列のレベルでのレベル非交差を暗黙の前提としており、この前提が崩れる状況では解析的な仮定等が破綻する可能性が高いのではないだろうか。

関連して、メゾスコピック系への厳密解の応用も興味深い今後の研究課題の一つとして挙げられる。境界条件を周期的境界条件から開いた鎖の境界条件などに変更して、境界に不純物が存在するような系の厳密解が議論されている。例えば、両端の開いた1次元ハバード模型の1番目の格子点上に境界化学ポテンシャル $-p$ が印加された模型を考えよう。ハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$\mathcal{H}_{open} = -t \sum_{j=1}^{L-1} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left(c_{j,\sigma}^\dagger c_{j+1,\sigma} + c_{j+1,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} \right) + U \sum_{j=1}^L n_{j,\uparrow} n_{j,\downarrow} + p \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} n_{1\sigma} \quad (9.1)$$

境界化学ポテンシャルの値に応じて様々な境界束縛状態が出現する。境界に束縛された電子を不純物とみなすと、様々な「表面相転移現象」を厳密に議論することができる。[25]

実際、量子臨界状態にある1次元系では境界端の影響は系全体に影響する可能性があり、境界効果は自明ではない。

A 座標的ベーテ仮設法の一般の場合

ハミルトニアンの作用を厳密に計算すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_{XXX}|M\rangle \\ &= \frac{J}{2} \sum_{1 \leq x_1 < \dots < x_M \leq N} \left[\sum_{j=1}^M \sum_{s=\pm 1} f(x_1, \dots, x_{j-1}, \overbrace{x_j + s}^j, x_{j+1}, \dots, x_M) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^{M-1} \left(f(x_1, \dots, x_{j-1}, \overbrace{x_j}^j, \overbrace{x_j}^{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_M) + f(x_1, \dots, x_{j-1}, \overbrace{x_j+1}^j, \overbrace{x_j+1}^{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_M) \right. \\
 & \quad \left. - 2f(x_1, \dots, x_{j-1}, \overbrace{x_j}^j, \overbrace{x_j+1}^{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_M) \right) \delta_{x_{j+1}, x_{j+1}} \\
 & - \left(f(1, x_2, \dots, x_{M-1}, N+1) + f(0, x_2, \dots, x_{M-1}, N) \right. \\
 & \quad \left. - 2f(1, x_2, \dots, x_{M-1}, N) \right) \delta_{x_1, 1} \delta_{x_M, N} + 2 \left(\frac{N}{4} - M \right) \left[\sigma_{x_1}^- \cdots \sigma_{x_M}^- | 0 \right\rangle
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

波動関数の座標の範囲を拡張しなくても、直接上式を示すことができることをコメントしておく。

B スtring解の数を与える状態和の計算

String解を数え上げる和 (6.65) は、ベーテと高橋によって独立な方法で計算された。ここではベーテによる計算法 [1] を紹介しよう。¹⁰ まず、関数 $Q_n(N; q_j)$ を定義する。

$$Q_n(N; q_1, q_2, \dots) = N - 2 \sum_{p < n} p q_p - 2 \sum_{p \geq n} n q_p \tag{B.1}$$

前に導入された T_n との関係は、 $2T_n + 1 = Q_n + M_n$ 、ただし $Q_n = Q_n(N; q_1 = M_1, q_2 = M_2, \dots)$ である。さて、ベーテの数え上げの議論における最も重要なトリックを説明しよう。正整数の変数 q を $q = \sum_n q_n$ と定義する。変数 q はStringセンターの数に対応する。このとき、次が示される。

$$\begin{aligned}
 Q_n(N; q_1, q_2, \dots) &= N - 2 \sum_{p < n} p q_p - 2 \sum_{p \geq n} n q_p \\
 &= (N - 2q) - 2 \sum_{2 \leq p \leq n-1} (p-1) q_p - 2 \sum_{p \geq n} (n-1) q_p \\
 &= (N - 2q) - 2 \sum_{1 \leq m \leq n-2} m q_{m+1} - 2 \sum_{m \geq n-1} (n-1) q_{m+1} \\
 &= Q_{n-1}(N - 2q; q_2, q_3, \dots)
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

つまり、 $N' = N - 2q$ および $q'_j = q_{j+1}$ として、関係式 $Q_n(N; q_j) = Q_{n-1}(N'; q'_j)$ が導かれた。特別な場合として、 $Q_1(N; q_j) = N - 2q$ である。このトリック (B.2) を用いると、次のような漸化的関係式が導かれる。

$$\begin{aligned}
 Z(N; q_j) &= \prod_{n=1}^{\infty} \binom{Q_n(N; q_j) + q_n}{q_n} = \binom{Q_1 + q_1}{q_1} \prod_{n=2}^{\infty} \binom{Q_n(N; q_j) + q_n}{q_n} \\
 &= \binom{N - 2q + q_1}{q_1} \prod_{m=1}^{\infty} \binom{Q_m(N - 2q; q'_j) + q'_m}{q'_m} \\
 &= \binom{N - 2q + q_1}{q_1} Z(N - 2q; q'_j)
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

¹⁰ 文献 [1] の §8 と記号も議論も全く同じである。

ここで $q'_j = q_{j+1}$ である。変数 r を以下のように定める： $r = \sum_n n q_n$ 、つまり変数 r は下向きスピンの数に対応する。下向きスピン数 r 、ストリングセンターの数が q であるようなベータ仮説固有ベクトルの数を $Z(N, r, q)$ と表す。つまり、次式で定義される。

$$Z(N, r, q) = \sum_{q_1 + \dots + q_r = q; q_1 + 2q_2 + \dots = r} Z(N; q_1, q_2, \dots) \quad (\text{B.4})$$

このとき、関係式 (B.3) に対応して以下の漸化式が導かれる。

$$Z(N, r, q) = \sum_{q_1=0}^{q-1} \binom{N-2q+q_1}{q_1} Z(N-2q, r-q, q-q_1) \quad (\text{B.5})$$

漸化式の初期条件として、 $r \geq 0$ のとき $Z(N, r, q=0) = 0$ であり、また常に $r \geq q$ であることに注意する。このとき、上の漸化式の解が次式で与えられることを数学的帰納法を用いて証明できる。

$$Z(N, r, q) = \frac{N-2r+1}{N-r+1} \binom{N-r+1}{q} \binom{r-1}{q-1} \quad (\text{B.6})$$

証明には次の公式を用いる。

$$\binom{a+b}{c} = \sum_{s=0}^c \binom{a}{s} \binom{b}{c-s}, \quad \text{when } a, b, c > 0 \quad (\text{B.7})$$

$a+b$ 個の中から c 個選ぶ選び方は、最初に a 個と b 個に分けておいてからそれぞれ s 個と $c-s$ 個選ぶ選び方の全体と同じ、ということがこの公式の意味である。

漸化式 (B.5) の証明を少し詳細に記述してみよう。まず $q=1$ の場合、明らかに式 (B.6) は成立する。なぜなら、 $q=1$ の場合はストリングの種類は一つだけで、それは r -ストリングでなければならない。そこで $M_r = 1$ より (あるいは $q_r = 1$ より) $Z(N, r, 1) = 2T_r + 1 = N - 2r + 1$ となる。そこで以下では $q > 1$ と仮定できる。そして、 $N' < N$ 、 $r' < r$ 、 $q' < q$ なる N', r', q' に対して $Z(N', r', q')$ が (B.6) で与えられると仮定する。すると、漸化式 (B.5) の右辺の和を計算すると、(B.6) が $Z(N, r, q)$ に対しても成立することが示される。まず、公式 (B.7) より

$$\binom{N-2q+q_1}{q_1} = \sum_{s=0}^q \binom{N-2q+q_1-r+1}{q_1-s} \binom{r-1}{s} \quad (\text{B.8})$$

が成り立つ。これを漸化式 (B.5) の右辺に代入し、二つの和の順番と領域を入れ替えて q_1 に関する和を先にして公式 (B.7) を 2 回適用すると、和が求まって実際に (B.6) になる。

謝辞

本解説文は、お茶の水女子大学大学院人間文化研究科博士前期課程において平成 10 年度および平成 11 年度に著者が行った集中講義の講義内容、および平成 11 年 6 月に中央

大学理工学部（大学院理工学研究科物理学専攻）で行った集中講義の内容に基づいている。¹¹そして、本解説を書く際にこれらの集中講義の参加者が筆記した講義ノート、特に島村（熊沢）美裕紀氏のノートを参考にした。お茶の水女子大学と中央大学の関係者の方々に集中講義をするチャンスを感謝するとともに、参加者の好奇心と忍耐力にも感謝したい。さらに、平成12年3月に著者は新潟大学大学院自然科学研究科において1次元可解量子スピン系の入門的講演を行い、その際の質疑応答も本文に反映されている。交流の場を設けて下さったことを新潟大学物理学教室に感謝したい。最後に、本解説で展開された視点は文部省在外研究員としてニューヨーク州立大学ストーニー・ブルック校に平成10年3月から平成11年2月まで滞在した際に著者が行った研究に基づいている。[25, 26, 27] 共同研究者の人々に感謝すると同時に、在外研究でお世話になった関係者の方々、特にお茶の水女子大学理学部物理教室に感謝したい。

参考文献

- [1] H.A. Bethe, *Zeitschrift für Physik* **71** (1931) 205.
- [2] C.N. Yang and C.P. Yang, *Phys. Rev.* (1966) **150**(1966) 321.
- [3] McCoy and Wu, *The Two-Dimensional Ising Model* (Harvard University Press, 1973, Cambridge Massachussetts).
- [4] R.J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (Academic Press, 1982, London).
- [5] M. Gaudin, *La fonction de l'onde de Bethe pour les modèles exacts de la mécanique statistique*, (Masson, 1983, Paris).
- [6] L.D. Faddeev and L. Takhtajan, *J. Soviet Math.* **24** (1984) 241 .
- [7] L.A. Takhtajan, *Introduction to Algebraic Bethe Ansatz*, *Lect. Notes in Physics* **242** (Springer-Verlag, 1985, Berlin) pp. 175-219.
- [8] V.E. Korepin, Bogoliubov and Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions* (Cambridge University Press, 1993, Cambridge)
- [9] A.M. Tsvelik, *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, 1995, Cambridge).

¹¹ 当時お茶の水女子大学大学院人間文化研究科と、東京工業大学大学院の全研究科および東京大学大学院理学系研究科との間には単位互換協定が結ばれており、東工大（理工学研究科）と東大の学生が何人か聴講したことを付記する。

- [10] M. Takahashi, *Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models* (Cambridge University Press, 1999, Cambridge).
- [11] 近藤淳、「金属電子論」(裳華房、1983)
- [12] 和達三樹、「非線形波動」(岩波、1997)
- [13] 斯波弘行、「固体の電子論」(丸善、1996)
- [14] 川上則雄・梁成吉、「共形場理論と1次元量子系」(岩波、1997)
- [15] 永長直人、「電子相関における場の量子論」(岩波、1998)
- [16] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. S  n  chal, *Conformal Field Theory*, (Springer-Verlag, 1997, New York)
- [17] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, *Combinatorial Group Theory* (Dover Pub., 1976, New York).
- [18] C.N. Yang, M.-L. Ge, *Braid groups, knot theory and statistical mechanics* (World Scientific, 1989, Singapore)
- [19] M. Wadati, T. Deguchi and Y. Akutsu, Phys. Reports **180** 4 & 5 (1989) pp. 247-332.
- [20] 神保道夫、「量子群とヤン・バクスター方程式」(シュプリンガー、1990)
- [21] 大槻知忠(  著)、「量子不変量」(日本評論社、1999)
- [22] 金森順次郎、「磁性」(培風館、1969)
- [23] 芳田奎、「磁性」(岩波、1991)
- [24] 草部浩一・青木秀夫、「強磁性」(東京大学出版会、1998)
- [25] T. Deguchi, R. Yue and K. Kusakabe, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) 7315.
- [26] T. Deguchi, F.H.L. Essler, F. G  hmann, V.E. Korepin, A. Kl  mper and K. Kusakabe, Phys. Reports **331** 5 (2000) pp. 197-281. (*Thermodynamics and excitations of the one-dimensional Hubbard model*, cond-mat/9904398.)
- [27] T. Deguchi, K. Fabricius and B.M. McCoy, The sl_2 loop algebra symmetry of the six-vertex model at roots of unity, cond-mat/9912141.